

等比数列型の和

等比数列型の和 $\sum_{k=1}^n (a_p k^p + a_{p-1} k^{p-1} + \cdots + a_1 k + a_0) r^k$ を計算するには,

$$(a_p k^p + a_{p-1} k^{p-1} + \cdots + a_1 k + a_0) r^k = g(k) - g(k-1)$$

を満たすような

$$g(k) = (b_p k^p + b_{p-1} k^{p-1} + \cdots + b_1 k + b_0) r^{k+1}$$

を見つけて, 階差型の和に直せばよい。

例 $S = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot 3^k$ を求める。

$g(m) = (am^2 + bm + c)3^{m+1}$ が $m^2 \cdot 3^m = g(m) - g(m-1)$ を満たすように, 定数 a, b, c を決める。

$$m^2 \cdot 3^m = g(m) - g(m-1)$$

$$m^2 \cdot 3^m = (am^2 + bm + c)3^{m+1} - \{a(m-1)^2 + b(m-1) + c\}3^{m-1}$$

$$m^2 \cdot 3^m = (am^2 + bm + c)3^{m+1} - \{am^2 - (2a-b)m + a - b + c\}3^m$$

$$m^2 \cdot 3^m = (3am^2 + 3bm + 3c)3^m - \{am^2 - (2a-b)m + a - b + c\}3^m$$

$$m^2 \cdot 3^m = \{2am^2 + (2a + 2b)m - a + b + 2c\}3^m$$

がすべての整数 m について成立すればよいので

$$2a = 1, \quad 2a + 2b = 0, \quad -a + b + 2c = 0$$

となるように a, b, c をとればよい。つまり

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}$$

とすればよい。従って $g(m) = \left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right) \cdot 3^{m+1}$ とおくと $m^2 \cdot 3^m = g(m) - g(m-1)$ となる。よって

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k^2 \cdot 3^k \\ &= \sum_{k=1}^n \{g(k) - g(k-1)\} \\ &= \{g(1) + \cdots + g(n-1) + g(n)\} - \{g(0) + g(1) + \cdots + g(n-1)\} \\ &= g(n) - g(0) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$g(n) = \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) \cdot 3^{n+1}, \quad g(0) = \frac{3}{2}$$

であるから

$$S = \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) \cdot 3^{n+1} - \frac{3}{2}$$

である。