

数列の極限

数列の極限値の厳密な定義を利用して、いくつか基本的な公式を証明しよう。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ であるとは

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある番号 N が存在して
 $n \geq N$ ならばつねに $|a_n - \alpha| < \varepsilon$

となることである。

和の公式

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ である。

任意の $\varepsilon > 0$ をとる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より、ある番号 N_1 があって

$$n \geq N_1 \text{ のときつねに } |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \cdots 1$$

となる。また $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ より、ある番号 N_2 があって

$$n \geq N_2 \text{ のときつねに } |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \cdots 2$$

となる。そこで N_1, N_2 のうち小さくはない方を N とおくと、1 2 より

$$n \geq N \text{ のときつねに } \begin{cases} |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{かつ} \\ |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \cdots 3$$

が成り立つ。そうすると $n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned} & |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \\ &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| && (3 \text{ 角不等式 } |A + B| \leq |A| + |B| \text{ より}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && (3 \text{ より}) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となる。よって

$$n \geq N \text{ のときつねに } |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

となるので $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ である。■

はさみうちの原理

つねに $a_n \leq b_n \leq c_n$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ となるとき
 $\{b_n\}$ も収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ となる。

任意の $\varepsilon > 0$ をとる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より、ある番号 N_1 が存在して $n \geq N_1$ のときつねに $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ つまり $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ である。よって、特に

$$n \geq N_1 \text{ のときつねに } \alpha - \varepsilon < a_n \cdots 1$$

である。一方 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ より、ある番号 N_2 が存在して $n \geq N_2$ のときつねに $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ つまり $\alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$ である。よって、特に

$$n \geq N_2 \text{ のときつねに } c_n < \alpha + \varepsilon \cdots 2$$

となる。よって N_1, N_2 のうち小さくはない方を N とおくと 1 2 より

$$n \geq N \text{ のときつねに } \begin{cases} \alpha - \varepsilon < a_n \\ \text{かつ} \\ c_n < \alpha + \varepsilon \end{cases} \cdots 3$$

となる。 $n \geq N$ のとき、3 と $a_n \leq b_n \leq c_n$ より

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon$$

であるから $\alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon$ となる。これを言い換えると $|b_n - \alpha| < \varepsilon$ ということであるから

$$n \geq N \text{ のときつねに } |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

となる。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ である。■