

## 定数係数線形漸化式

ここでは2つのtypeの漸化式の解法を考える。

$$(A) x_{n+1} + px_n = f(n)$$

$$(B) x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$$

(A)を満たす数列は初期値をひとつ与えればただひとつに決まり、(B)を満たす数列は初期値を2つ与えればただひとつに決まる。そこで初期値の個数と同じだけの任意定数を含む数列で(A)(B)を満たすものを(A)(B)の一般解と呼ぶ。また(A)(B)を満たす(たまたま見つけた)ひとつの数列を特解とすることにする。

### 例

(1)  $x_{n+1} - 2x_n = 0$  の一般解は  $x_n = C2^n$  であり、 $x_n = 2^n$  は特解である。

(2)  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$  の一般解は  $x_n = C2^n + D3^n$  であり、 $x_n = 2^n + 3^n$  は特解である。

以下(A)(B)の一般解を求める。そのために  $f(n) = 0$  という特別な場合に帰着して考える。そこで(A)(B)において  $f(n) = 0$  となる場合を斉次の場合とすることにする。そうすると次が成り立つ。

### (命題)

$$(\text{一般解}) = (\text{特解}) + (\text{斉次の場合の一般解})$$

どちらも同様なので(B)の場合のみ示す。 $g(n)$ を(B)の特解とする。従って

$$g(n+2) + pg(n+1) + qg(n) = f(n)$$

である。これと(B)を辺々引くと

$$\{x_{n+2} - g(n+2)\} + p\{x_{n+1} - g(n+1)\} + q\{x_n - g(n)\} = 0$$

となる。そこで  $y_n = x_n - g(n)$  とおくと

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$$

となる。これは斉次の場合である。これの一般解を  $y_n$  とすると  $y_n$  は任意定数を 2 つ含んでいる。そして  $x_n = y_n + g(n)$  と書ける。そうすると、この  $x_n$  も 2 つの任意定数を含むので一般解である。■

上の命題より我々の目標は次の 2 つである。

- (ア) 特解を求める。
- (イ) 斉次の場合の一般解を求める。

まず (イ) を考える。

- (a)  $x_{n+1} + px_n = 0$
- (b)  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$

の一般解は次のようになる。

( 斉次の場合の一般解 )

- (1)  $x_{n+1} + px_n = 0$  の一般解は  $x_n = C(-p)^{n-1}$  である。
- (2)  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  の一般解は、2 次方程式  $x^2 + px + q = 0$  の 2 解を  $\alpha, \beta$  とするとき次で与えられる。
  - (a)  $\alpha \neq \beta$  のとき  $x_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}$
  - (b)  $\alpha = \beta$  のとき  $x_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2n\alpha^{n-1}$

(1) (2) はともに必要な個数の任意定数を含んでいるのであとは直接、漸化式を満たすことを check すればよい。どちらも同様なので、(2) のみ示す。

(i)  $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ ,  $\beta^2 + p\beta + q = 0$  に注意すると

$$\begin{aligned} & x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n \\ &= (C_1\alpha^{n+1} + C_2\beta^{n+1}) + p(C_1\alpha^n + C_2\beta^n) + q(C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}) \\ &= C_1(\alpha^{n+1} + p\alpha^n + q\alpha^{n-1}) + C_2(\beta^{n+1} + p\beta^n + q\beta^{n-1}) \\ &= C_1\alpha^{n-1}(\alpha^2 + p\alpha + q) + C_2\beta^{n-1}(\beta^2 + p\beta + q) \\ &= C_1\alpha^{n-1} \cdot 0 + C_2\beta^{n-1} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

となり, 確かに漸化式を満たす。

(ii)  $\alpha$  は重解であるから  $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$  に加えて, 解と係数の関係より  $2\alpha = -p$  である。

$$\begin{aligned} & x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n \\ &= \{C_1\alpha^{n+1} + C_2(n+2)\alpha^{n+1}\} + p\{C_1\alpha^n + C_2(n+1)\alpha^n\} + q\{C_1\alpha^{n-1} + C_2n\alpha^{n-1}\} \\ &= C_1(\alpha^{n+1} + p\alpha^n + q\alpha^{n-1}) + C_2\{(n+2)\alpha^{n+1} + p(n+1)\alpha^n + qn\alpha^{n-1}\} \\ &= C_1\alpha^{n-1}(\alpha^2 + p\alpha + q) + C_2\alpha^{n-1}\{(n+2)\alpha^2 + p(n+1)\alpha + qn\} \\ &= C_1\alpha^{n-1}(\alpha^2 + p\alpha + q) + C_2\alpha^{n-1}\{n(\alpha^2 + p\alpha + q) + \alpha(2\alpha + p)\} \\ &= C_1\alpha^{n-1} \cdot 0 + C_2\alpha^{n-1}\{n \cdot 0 + \alpha \cdot 0\} = 0 \end{aligned}$$

となり, 確かに漸化式を満たす。■

上で考えた 2 次方程式  $x^2 + px + q = 0$  をこの漸化式の特性方程式という。

例  $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \cdots 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5 \cdots 2$  を解く。

1 の特性方程式は  $x^2 - 3x + 2 = 0$  であり, その解は  $x = 1, 2$  である。

$$a_n = C_1 1^{n-1} + C_2 2^{n-1} = C_1 + C_2 2^{n-1}$$

とおくと  $C_1, C_2$  がどんな定数であってもこれは漸化式 1 を満たす。これが更に 2 も満たすように  $C_1, C_2$  を決める。2 より

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 5 \end{cases}$$

であるから  $C_1 = -3$ ,  $C_2 = 4$  となる。そうすると

$$a_n = -3 + 4 \cdot 2^{n-1} = -3 + 2^{n+1}$$

は 1 2 を同時に満たすが, そのような数列はただひとつなので  $a_n = -3 + 2^{n+1}$  が求めるものである。■

さて, 今度は (A)(B) の特解を求めることを考える。ここでは  $f(n)$  が次のような形をしている場合を考える。

(ア)  $f(n) = (n \text{ についての } k \text{ 次多項式})$  のとき

まず,  $n$  についての  $k$  次多項式で特解をさがす。見つからないときは  $n \times (n \text{ についての } k \text{ 次多項式})$  で特解をさがす。

(イ)  $f(n) = r^n$  の形のとき

まず,  $Cr^n$  の形の特解をさがす。見つからないときは  $Cnr^n$  の形の特解をさがす。それでも見つからないときは  $Cn^2r^n$  の形の特解をさがす。

この方法で特解が見つければ (一般解) = (特解) + (斉次の場合の一般解) によって一般解が求まる。

例  $a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdots 1, a_1 = 1$  を解く。

まず,  $a_{n+1} = 2a_n$  (斉次の場合) の一般解は  $a_n = C2^{n-1}$  である。一方, 1 の特解を見つけるために  $b_n = c$  (定数) として 1 に代入すると  $c = 2c + 3$  となるので  $c = -3$  である。よって  $a_n = C2^{n-1} - 3$  が 1 の一般解である。そして  $a_1 = 1$  より  $C = 4$  となる。以上で  $a_n = 2^{n+1} - 3$  が求めるものである。■

例  $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = n \cdots 1, a_1 = 1, a_2 = 1$  を解く。

まず,  $x^2 + 2x + 1 = 0$  を解くと  $x = -1$  (重解)。よって  $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$  (斉次の場合) の一般解は  $a_n = C_1(-1)^{n-1} + C_2n(-1)^{n-1}$  である。次に特解を求めるために  $un + v$  を 1 に代入すると  $u(n+2) + v + 2\{u(n+1) + v\} + un + v = n$ 。これが, すべての  $n$  について成り立つようにしたいので, 両辺で係数比較して

$$\begin{cases} 4u &= 1 \\ 4u + 4v &= 0 \end{cases} \quad \text{つまり } u = \frac{1}{4}, v = -\frac{1}{4} \text{ とすればよい。従って } \frac{1}{4}n - \frac{1}{4} \text{ が } 1 \text{ の}$$

特解である。そうすると 1 の一般解は  $a_n = C_1(-1)^{n-1} + C_2n(-1)^{n-1} + \frac{1}{4}n - \frac{1}{4}$  となる。

ここで  $a_1 = 1, a_2 = 1$  より  $C_1, C_2$  を求めると  $C_1 = \frac{11}{4}, C_2 = -\frac{7}{4}$  となる。以上で

$$a_n = \frac{11(-1)^{n-1} - 7n(-1)^{n-1} + n - 1}{4} \text{ である。} \blacksquare$$