

## 連立 2 項間漸化式の解法

連立漸化式  $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \cdots 1 \\ b_{n+1} = ra_n + rb_n \cdots 2 \end{cases}$  ( $qr \neq 0$ ) を解くには

(1) 行列を使って書き直すと  $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  となるので

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

となることを利用する方法

(2) 1 より  $qb_n = a_{n+1} - pa_n$  , また 2 より  $qb_{n+1} = qra_n + rqb_n$  であるから , 前者を後者に代入すると

$$a_{n+2} - pa_{n+1} = qra_n + r(a_{n+1} - pa_n)$$

$$a_{n+2} - (p+r)a_{n+1} + (p-qr)a_n = 0$$

となるので , この 3 項間漸化式を解く方法

(3)  $a_{n+1} - pb_{n+1} = q(a_n - pb_n)$  となる  $p, q$  を求めて  $\{a_n - pb_n\}$  が公比  $q$  の等比数列になることを利用する方法

などがある。

ここでは , (3) の方法の例を示す。

<p>例 <math>\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \cdots 1 \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \cdots 2 \end{cases}</math> <math>a_1 = 1, b_1 = 1</math> を解く。</p>
--

$a_{n+1} - pb_{n+1} = q(a_n - pb_n) \cdots 3$  となる  $p, q$  を見つけるために 1 , 2 をここへ代入すると

$$3a_n + b_n - p(2a_n + 4b_n) = q(a_n - pb_n)$$

$$(3 - 2p)a_n + (1 - 4p)b_n = qa_n - pqb_n$$

であるから

$$3 - 2p = q \cdots 4 \quad 1 - 4p = -pq \cdots 5$$

となればよい。4 を 5 に代入すると

$$1 - 4p = -p(3 - 2p) \quad \text{つまり} \quad 2p^2 + p - 1 = 0$$

となるので  $p = -1, \frac{1}{2}$  となる。従って

$$(p, q) = (-1, 5), \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

とすれば 3 が成り立つ。つまり

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n) \cdots 6 \\ a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = 2\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right) \cdots 7 \end{cases}$$

である。

$$6 \text{ より } a_n + b_n = 5^{n-1}(a_1 + b_1) = 2 \cdot 5^{n-1}$$

$$7 \text{ より } a_n - \frac{1}{2}b_n = 2^{n-1}\left(a_1 - \frac{1}{2}b_1\right) = 2^{n-2} \text{ となる。この連立方程式を解くと}$$

$$a_n = \frac{1}{3}(2 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}), \quad b_n = \frac{2}{3}(2 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-2})$$