

## 数列に関する Cauchy の収束判定法

数列  $\{a_n\}$  が Cauchy 列であるとは、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある番号  $N$  が存在して

$$p, q \geq N \text{ ならば、つねに } |a_p - a_q| < \varepsilon$$

となることである。

$\{a_n\}$  が Cauchy 列であること、つまり番号を大きくすれば、どの2項の差もいくらでも小さくできるということが、数列  $\{a_n\}$  が収束するための必要十分条件であることを示す。

(補題)(区間縮小法)

閉区間の列  $I_n = [a_n, b_n]$  が  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$  を満たすとする。  
このとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  ならば  $\{a_n\}, \{b_n\}$  はともに同じ値  $a$  に収束する。

仮定より

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_1$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots \geq a_1$$

である。よって  $\{a_n\}$  は上に有界な単調増加数列であり、 $\{b_n\}$  は下に有界な単調減少数列である。よって  $\{a_n\}, \{b_n\}$  はともに収束するので  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  とおく。このとき  $a$

は  $\{a_n\}$  の上限、 $b$  は  $\{b_n\}$  の下限であることに注意しよう<sup>注1</sup>。

$a \leq b$  となることを示そう。

そのために、 $a > b$  と仮定する。 $a$  は最小上界であるから  $a$  は  $\{a_n\}$  の上界ではない。よって  $b < a_{n_1}$  となる番号  $a_{n_1}$  が存在する。ところが  $\{a_n\}, \{b_n\}$  のとり方から、任意の  $n, m$  に対してつねに  $a_n \leq b_m$  であるから、任意の  $m$  に対して  $b < a_{n_1} \leq b_m$  となる。そうすると  $a_{n_1}$  は  $b$  より大きな  $\{b_n\}$  の下界となるから  $b$  が最大下界であることに反する。よって  $a \leq b$  である。

従って、任意の  $n$  に対してつねに  $a_n \leq a \leq b \leq b_n$  である。つまり

$$b_n - a_n \geq b - a \geq 0$$

となる。そして  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  であるから  $b = a$  となる。■

上の補題を用いて、次を示そう。

<sup>注1</sup> 有界単調数列が収束することの証明参照。

(定理)(Cauchy の判定法)

数列  $\{a_n\}$  が収束するための必要十分条件は,  $\{a_n\}$  が Cauchy 列となることである。

(必要性)

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  とおく。任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある番号  $N$  があって,  $n \geq N$  のとき, つねに  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  とできる。そうすると  $p, q \geq N$  のとき,  $|a_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  かつ  $|a_q - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  であるから

$$\begin{aligned} |a_p - a_q| &= |(a_p - a) + (a - a_q)| \\ &\leq |a_p - a| + |a - a_q| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる。

(十分性)

(i)  $\{a_n\}$  が有界であることを示す。

Cauchy 列であるから, ある番号  $N$  があって

$$p, q \geq N \text{ ならば, つねに } |a_p - a_q| < 1$$

となる ( $\varepsilon = 1$  とした)。そうすると, 特に  $n \geq N$  のとき  $|a_n - a_N| < 1$  である。よって  $\{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots\} \subseteq (a_N - 1, a_N + 1)$  となり

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subseteq (a_N - 1, a_N + 1) \cup \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}\}$$

となる。ここで,  $\{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}\}$  は有限集合であるから,  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  は上にも下にも有界であることが分かる。従って  $A_n = \{a_k \mid k \geq n\}$  とおくと  $A_n$  は上にも下にも有界である。よって  $A_n$  には下限  $x_n$  と上限  $y_n$  が存在する。  $A_{n+1} \subseteq A_n$  であるから,

$$\{A_n \text{ の上界}\} \subseteq \{A_{n+1} \text{ の上界}\}, \quad \{A_n \text{ の下界}\} \subseteq \{A_{n+1} \text{ の下界}\}$$

である。よって  $y_{n+1} \leq y_n, \quad x_n \leq x_{n+1}$  となる。従って

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \leq y_2 \leq y_1$$

となる。従って  $I_n = [x_n, y_n]$  とおくと

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

である。

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$  を示す。

$\varepsilon$  を任意の正数とする。 $\{a_n\}$  は Cauchy 列であるから、ある番号  $M$  があって  $p, q \geq M$  ならつねに  $|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2}$  が成り立つ。そこで  $n \geq M$  とする。そうすると  $r \geq n, q \geq M$  なる任意の  $r, q$  に対して  $|a_r - a_q| < \frac{\varepsilon}{2}$  である。つまり  $a_q - \frac{\varepsilon}{2} < a_r < a_q + \frac{\varepsilon}{2}$  となる。 $r \geq n$  なる任意の  $r$  に対して  $a_q - \frac{\varepsilon}{2} < a_r$  であるから、 $a_q - \frac{\varepsilon}{2}$  は  $A_n$  の下界のひとつである。そして、 $x_n$  は  $A_n$  の下限つまり最大下界であるから  $a_q - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_n$  となる。一方、 $y_n$  は  $A_n$  の上限つまり最小上界であるから、 $y_n \leq a_q + \frac{\varepsilon}{2}$  である。よって

$$0 \leq y_n - x_n \leq \left(a_q + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(a_q - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

となるので  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$  である。そうすると、補題より  $\{y_n\}, \{x_n\}$  は同じ値に収束するので、その値を  $a$  とおく。

(iii)  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  となることを示す。

任意の  $\varepsilon > 0$  をとる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  であるから、ある番号  $K$  があって  $n \geq K$  ならつねに、 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  かつ  $|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  となる。従って特に、 $a - \varepsilon < x_n$  かつ  $y < a + \varepsilon$  である。

ここで、 $x_n$  は  $A_n$  の下限であって  $a_n \in A_n$  であるから、 $x_n \leq a_n$  である。よって  $a - \varepsilon < a_n$  である。また、 $y_n$  は  $A_n$  の上限であるから  $a_n \leq y_n$  である。よって  $a_n < a + \varepsilon$  である。従って  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  つまり  $|a_n - a| < \varepsilon$  となるので  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  である。■