

## 分数漸化式

$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$  ( $r \neq 0$ ) の形の漸化式を式変形を利用して解く<sup>注1</sup>。

$x = \frac{px + q}{rx + s}$  つまり  $rx^2 + (s - p)x - q = 0$  のひとつの解を  $\alpha$  とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \alpha \\ &= \frac{(p - \alpha r)a_n + q - \alpha s}{ra_n + s} \\ &= \frac{(p - \alpha r)(a_n - \alpha) + \alpha(p - \alpha r) + q - \alpha s}{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s} \\ &= \frac{(p - \alpha r)(a_n - \alpha) - \{r\alpha^2 + (s - p)\alpha - q\}}{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s} \end{aligned}$$

ここで  $\alpha$  の定義より  $r\alpha^2 + (s - p)\alpha - q = 0$  である。よって

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{(p - \alpha r)(a_n - \alpha)}{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s}$$

となる。ここで両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r}{p - \alpha r} + \frac{r\alpha + s}{p - \alpha r} \cdot \frac{1}{a_n - \alpha}$$

となる。そうすると  $b_n = \frac{1}{a_n - \alpha}$  とおくと

$$b_{n+1} = \frac{r\alpha + s}{p - \alpha r} b_n + \frac{r}{p - \alpha r}$$

であるから  $b_n$  が求まり、従って  $a_n$  が分かる。

<sup>注1</sup>式変形以外に、行列の  $n$  乗を利用する解法もある。

$$\text{漸化式より } \frac{a_{n+1}}{1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \text{ であるから } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} pa_n + q \\ ra_n + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ となるから } \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ とすると } \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta \\ \gamma a_1 + \delta \end{pmatrix}$$

つまり  $\frac{a_n}{1} = \frac{\alpha a_1 + \beta}{\gamma a_1 + \delta}$  となり、 $a_n = \frac{\alpha a_1 + \beta}{\gamma a_1 + \delta}$  と分かる。

例  $a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 4} \cdots 1, a_1 = 4$  を解く。

$x = \frac{3x + 2}{x + 4}$  つまり  $x^2 + x - 2 = 0$  を解くと  $x = 1, -2$  である。1 を変形する。

$$a_n - 1 = \frac{3a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 4} - 1 = \frac{2a_{n-1} - 2}{a_{n-1} + 4}$$

であるから  $a_n - 1 = \frac{2(a_{n-1} - 1)}{a_{n-1} + 4} \cdots 2$  である。また同様に

$$a_n + 2 = \frac{3a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 4} + 2 = \frac{5a_{n-1} + 10}{a_{n-1} + 4}$$

であるから  $a_n + 2 = \frac{5(a_{n-1} + 2)}{a_{n-1} + 4} \cdots 3$  である。2・3 の辺々を割ると

$$\frac{a_n - 1}{a_n + 2} = \frac{2}{5} \frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 2}$$

となる。従って  $\left\{ \frac{a_n - 1}{a_n + 2} \right\}$  は公比  $\frac{2}{5}$  の等比数列となる。よって  $\frac{a_n - 1}{a_n + 2} = \left( \frac{2}{5} \right)^{n-1} \frac{a_1 - 1}{a_1 + 2}$

である。ここへ  $a_1 = 4$  を代入すると  $\frac{a_n - 1}{a_n + 2} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} \right)^{n-1}$  となる。

従って  $2 \cdot 5^{n-1}(a_n - 1) = 2^{n-1}(a_n + 2)$  より  $a_n = \frac{2 \cdot 5^{n-1} + 2^n}{2 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}$  となる。■

例  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{4 - x_n}{3 - x_n} \cdots 1$  を解く。

$x = \frac{4 - x}{3 - x}$  つまり  $x^2 - 4x + 4 = 0$  を解くと  $x = 2$  (重解) である。1 を変形する。

$$x_{n+1} - 2 = \frac{4 - x_n}{3 - x_n} - 2 = \frac{-2 + x_n}{3 - x_n}$$

であるから  $x_{n+1} - 2 = \frac{x_n - 2}{-(x_n - 2) + 1} \cdots 2$  となる。ここで、もしある番号  $m$  に対して  $x_m = 2$  とすると  $2$  を繰り返し用いて  $x_m = x_{m-1} = \cdots = x_1 = 2$  となり仮定に反する。よって  $x_n \neq 2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) である。そこで  $2$  の逆数をとると

$$\frac{1}{x_{n+1} - 2} = \frac{1}{x_n - 2} - 1$$

となる。そうすると  $\left\{ \frac{1}{x_n - 2} \right\}$  は公差  $-1$  の等差数列となる。

よって  $\frac{1}{x_n - 2} = \frac{1}{x_1 - 2} + (n - 1)(-1)$ 。ここへ  $x_1 = 1$  を代入すると  $\frac{1}{x_n - 2} = -n$  となる。従って  $x_n = 2 - \frac{1}{n}$  ■