

指数・対数関数の極限

1 e の定義

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は収束することが知られている。この極限値を自然対数の底と呼んで e と書く。

定理 1.1

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(1) $x > 1$ とするとき, $n \leq x < n+1$ なる自然数 n をとると

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ であるから $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdots 1$ となる。一方

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

であるから $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \cdots 2$

となる。1 と 2 より $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdots 3$ である。

ここで $x \rightarrow \infty$ のとき $n \rightarrow \infty$ であるから

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \rightarrow e \cdot 1 = e \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e \quad (x \rightarrow \infty)$$

となる。よって 3 において $x \rightarrow \infty$ とすると、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

となる。

(2) $x = -t$ とおくと $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ で

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(t-1)+1}{(t-1)}\right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \\ &= e \cdot 1 \\ &= e \end{aligned}$$

(3) $\frac{1}{x} = t$ とおくと $x \rightarrow 0+0$ のとき $t \rightarrow \infty$ であり $x \rightarrow 0-0$ のとき $t \rightarrow -\infty$ である。そこで (1) (2) を用いると

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

となる。

(4) $y = e^x - 1$ とおくと $x \rightarrow 0$ のとき $y \rightarrow 0$ で $x = \log(y+1)$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{y} \log(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log(y+1)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\log e} = 1 \quad \blacksquare$$

2 指数関数の極限

定理 2.1

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ (n は自然数の定数)
- (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$ (n は自然数の定数)

(1) (2) (4) は明らかなので (3) のみ示す。

(3) まず $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x \cdots 1$ であることを示す。

$f(x) = e^x - 1 - x$ とおくと $f'(x) = e^x - 1$ であるから $x > 0$ のときつねに $f'(x) > 0$ となり, $x > 0$ で $f(x)$ は単調増加である。そして $f(0) = 0$ であるから $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ となる。以上で 1 は示された。

n を自然数とする。1 より $e^{\frac{x}{n+1}} > 1 + \frac{x}{n+1}$ であるから, 両辺を $n+1$ 乗すると

$$e^x > \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

辺々を x^n で割ると

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)^{n+1}} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

となるので $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ となり示された。■

3 対数関数の極限

定理 3.1

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \log x = -\infty$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$ ($a > 0$ は定数)
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\log x}{x} = -\infty$

(1) (2) (5) については明らかなので (3) (4) のみ示す^{注1}。

(3) $t = \log x$ とおくと $x = e^t$ で $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ である。そして

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t}}$$

となる。ここで、公式 (3.1) (3) で $n = 1$ の場合を考えると $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{t} = \infty$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t}} = 0 \text{ となる。}$$

(4) $t = x^a$ とおくと $a > 0$ であるから $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ である。そして $\log t = a \log x$

つまり $\log x = \frac{\log t}{a}$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{\log t}{t}$$

となる。ここで (3) より $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$ である。■

注1 (5) は不定形ではない。 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \log x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = \infty$ である。