

## 指数関数の定義

$a > 0$   $a \neq 1$  のとき, 自然数  $n$  に対して

$$a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ 個}}$$

であるから,  $a^n$  の意味ははっきり分かる。しかし, 例えば  $a^{\sqrt{2}}$  の意味ははっきりしない。  
ここでは, 実数  $x$  に対して  $a^x$  はどのように定義されるのかをきちんと述べることにする。

$a > 0$ ,  $a \neq 1$  に対して  $a^x$  を定義しよう。

(1)  $x = n$  ( $n$  は自然数) のとき,  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 個}}$

(2)  $x = \frac{n}{m}$  ( $m, n$  は自然数) つまり  $x$  が正の有理数のとき,  $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

但し,  $\sqrt[m]{x}$  は  $m$  乗すると  $x$  になる実数のうち (もし 2 つあれば) 正のものを表す。

(3)  $x$  が負の有理数のとき,  $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$

(4)  $x = 0$  のとき,  $a^0 = 1$

以上で, 有理数  $x$  に対して  $a^x$  が定義された。また, 定義から  $a^x > 0$  である。

(4) 有理数  $s, t$  に対して, 以下の指数法則が成り立つ。

(i)  $a^{s+t} = a^s a^t$  である。

(ii)  $(a^s)^t = a^{st}$

(iii)  $a^s b^s = (ab)^s$

$s = \frac{p}{q}$ ,  $t = \frac{v}{w}$  ( $q, w$  は自然数,  $p, v$  は整数) とする。

(i)  $(a^s a^t)^{qw} = \left(a \frac{p}{q}\right)^{qw} \left(a \frac{v}{w}\right)^{qw} = (a^p)^w (a^v)^q = a^{pw} a^{vq} = a^{pw+vq}$

であるから  $a^s a^t = a^{\frac{pw+vq}{qw}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{v}{w}} = a^{s+t}$

(ii)  $\left(a \frac{p}{q}\right)^{qv} = \left\{ \left(a \frac{p}{q}\right)^q \right\}^v = (a^p)^v = a^{pv}$  であるから, 両辺で  $qw$  乗根をとると

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{v}{w}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{v}{w}} \text{ つまり } (a^s)^t = a^{st}$$

(iii)  $\left(a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p b^p = (ab)^p$  である。この両辺で  $q$  乗根をとると  $a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} = (ab)^{\frac{p}{q}}$  つまり  $a^s b^s = (ab)^s$  ■

以下, しばらく  $a > 1$  のときに考える。

(5)  $a^x$  ( $x \in \mathbb{Q}$ ) は単調増加である。

$r > 0$  のとき  $f(x) = x^r$  ( $x > 0$ ) は単調増加である。よって  $r > 0$  のとき,  $a^r > 1^r = 1$  である。よって  $s < t$  を有理数とすると,  $t - s > 0$  であるから  $a^{t-s} > 1^{t-s} = 1$  となる。そうすると

$$a^t - a^s = a^s(a^{t-s} - 1) > a^s(1^{t-s} - 1) = 0$$

となり示された。■

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$  である。

$x$  が正の有理数のとき,  $a^x$  は単調増加であるから,  $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$  は単調減少である。そして  $a^{\frac{1}{n}} > 1$  であるから下に有界である。よって  $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$  は収束し, その極限值は  $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$  の下限  $\alpha \geq 1$  である。任意の  $n$  に対し  $a^{\frac{1}{n}} \geq \alpha$  つまり  $a \geq \alpha^n$  となるが, ここで  $\alpha > 1$  とすると  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \infty$  であるから矛盾である。よって  $\alpha = 1$  となり  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$  である。■

(7)  $\alpha$  が無理数のときは, 上に有界な集合  $D_\alpha = \left\{a^r \mid r < \alpha, r \in \mathbb{Q}\right\}$  の上限を  $a^\alpha$  と定義する。  $a^\alpha = \sup D_\alpha$

以上で, 全実数に対して  $a^x$  ( $a > 1$ ) が定義された。

(9)  $a^x$  は単調増加である。

$x < y$  を実数とする。

(i)  $x, y$  がともに有理数なら  $a^x < a^y$  は既知。

(ii)  $x = \xi$  は無理数で,  $y = r$  は有理数のとき。

$\xi < s < r$  なる有理数  $s$  がある。 $a^s$  は  $D_\xi$  の上界のひとつであるから  $a^\xi \leq a^s$  となる。  
よって  $a^\xi \leq a^s < a^r$  つまり  $a^x < a^y$

(iii)  $x = r$  は有理数で,  $y = \eta$  は無理数のとき。

$r < s < \eta$  となる有理数  $s$  がある。 $a^\eta$  は  $D_\eta$  の上限であるから  $a^s \leq a^\eta$  である。よって  
 $a^r < a^s \leq a^\eta$  つまり  $a^x < a^y$

(iv)  $x = \xi$  も,  $y = \eta$  も無理数のとき。

$\xi < r < \eta$  なる有理数がある。上の議論より  $a^\xi < a^r$  かつ  $a^r < a^\eta$  であるから  $a^\xi < a^\eta$  となる。■

(10)  $a^x$  は連続である。

$\lim_{x \rightarrow \beta} a^x = a^\beta$  を言う。

$\beta < \xi$  なる実数をとって固定する。

$r < s < \xi$  なる有理数  $r, s$  に対して

$$a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1) < a^\xi(a^{s-r} - 1) \cdots 1$$

(6) より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0$  であるから, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $a^\xi \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon$  となる自然数  $n$  が存在する。よって  $\delta_1 = \frac{1}{n}$  とおけば,  $1$  より  $r < s < \xi$  で  $s - r < \delta_1$  のとき

$$a^s - a^r < a^\xi(a^{s-r} - 1) < a^\xi(a^{\delta_1} - 1) = a^\xi \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon$$

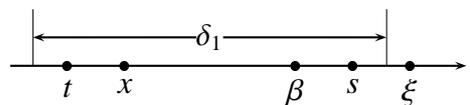
つまり

$$r < s < \xi \text{ かつ } s - r < \delta_1 \implies a^s - a^r < \varepsilon \cdots 2 \text{ である。}$$

さて,  $|x - \beta| < \delta_1$  かつ  $x, \beta < \xi$  とする。

このとき  $x < \beta$  なら  $t < x < \beta < s$  なる有理数  $s, t$  で  $s - t < \delta_1$  なるものが存在するので

$$a^\beta - a^x < a^s - a^t < \varepsilon$$



となる。

$\beta < x$  なら  $t < \beta < x < s$  なる有理数  $s, t$  で  $s - t < \delta_1$  なるものが存在するので

$$a^x - a^\beta < a^s - a^t < \varepsilon$$

となる。よって、 $|x - \beta| < \delta_1$  かつ  $x, \beta < \xi$  のとき  $|a^x - a^\beta| < \varepsilon$  となる。

$\delta = \min(\delta_1, |\beta - \xi|)$  とおけば、 $|x - \beta| < \delta$  のとき、 $|x - \beta| < \delta_1$  かつ  $x, \beta < \xi$  となるから

$$|x - \beta| < \delta \implies |a^x - a^\beta| < \varepsilon$$

となる。■

以上で、 $a > 1$  のとき、全実数に対して  $a^x$  が定義され、これは連続で単調増加であることが分かった。

$a = 1$  のときは、つねに  $a^x = 1^x = 1$  である。

$0 < a < 1$  のときは  $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$  と定める。

この定義において、 $x = r$  が有理数のときには  $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = (a^{-1})^{-r} = a^r$  となるので以前に定義したものと一致する。