

指数関数の定義

$a > 0$ $a \neq 1$ のとき, 自然数 n に対して

$$a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ 個}}$$

であるから, a^n の意味ははっきり分かる。しかし, 例えば $a^{\sqrt{2}}$ の意味ははっきりしない。
ここでは, 実数 x に対して a^x はどのように定義されるのかをきちんと述べることにする。

$a > 0$, $a \neq 1$ に対して a^x を定義しよう。

(1) $x = n$ (n は自然数) のとき, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 個}}$

(2) $x = \frac{n}{m}$ (m, n は自然数) つまり x が正の有理数のとき, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

但し, $\sqrt[m]{x}$ は m 乗すると x になる実数のうち (もし 2 つあれば) 正のものを表す。

(3) x が負の有理数のとき, $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$

(4) $x = 0$ のとき, $a^0 = 1$

以上で, 有理数 x に対して a^x が定義された。また, 定義から $a^x > 0$ である。

(4) 有理数 s, t に対して, 以下の指数法則が成り立つ。

(i) $a^{s+t} = a^s a^t$ である。

(ii) $(a^s)^t = a^{st}$

(iii) $a^s b^s = (ab)^s$

$s = \frac{p}{q}$, $t = \frac{v}{w}$ (q, w は自然数, p, v は整数) とする。

(i) $(a^s a^t)^{qw} = \left(a \frac{p}{q}\right)^{qw} \left(a \frac{v}{w}\right)^{qw} = (a^p)^w (a^v)^q = a^{pw} a^{vq} = a^{pw+vq}$

であるから $a^s a^t = a^{\frac{pw+vq}{qw}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{v}{w}} = a^{s+t}$

(ii) $\left(a \frac{p}{q}\right)^{qv} = \left\{ \left(a \frac{p}{q}\right)^q \right\}^v = (a^p)^v = a^{pv}$ であるから, 両辺で qw 乗根をとると

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{v}{w}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{v}{w}} \text{ つまり } (a^s)^t = a^{st}$$

(iii) $\left(a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p b^p = (ab)^p$ である。この両辺で q 乗根をとると $a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} = (ab)^{\frac{p}{q}}$ つまり $a^s b^s = (ab)^s$ ■

以下, しばらく $a > 1$ のときに考える。

(5) a^x ($x \in \mathbb{Q}$) は単調増加である。

$r > 0$ のとき $f(x) = x^r$ ($x > 0$) は単調増加である。よって $r > 0$ のとき, $a^r > 1^r = 1$ である。よって $s < t$ を有理数とすると, $t - s > 0$ であるから $a^{t-s} > 1^{t-s} = 1$ となる。そうすると

$$a^t - a^s = a^s(a^{t-s} - 1) > a^s(1^{t-s} - 1) = 0$$

となり示された。■

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ である。

x が正の有理数のとき, a^x は単調増加であるから, $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$ は単調減少である。そして $a^{\frac{1}{n}} > 1$ であるから下に有界である。よって $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$ は収束し, その極限值は $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$ の下限 $\alpha \geq 1$ である。任意の n に対し $a^{\frac{1}{n}} \geq \alpha$ つまり $a \geq \alpha^n$ となるが, ここで $\alpha > 1$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \infty$ であるから矛盾である。よって $\alpha = 1$ となり $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ である。■

(7) α が無理数のときは, 上に有界な集合 $D_\alpha = \left\{a^r \mid r < \alpha, r \in \mathbb{Q}\right\}$ の上限を a^α と定義する。 $a^\alpha = \sup D_\alpha$

以上で, 全実数に対して a^x ($a > 1$) が定義された。

(9) a^x は単調増加である。

$x < y$ を実数とする。

- (i) x, y がともに有理数なら $a^x < a^y$ は既知。
- (ii) $x = \xi$ は無理数で, $y = r$ は有理数のとき。
 $\xi < s < r$ なる有理数 s がある。 a^s は D_ξ の上界のひとつであるから $a^\xi \leq a^s$ となる。
 よって $a^\xi \leq a^s < a^r$ つまり $a^x < a^y$
- (iii) $x = r$ は有理数で, $y = \eta$ は無理数のとき。
 $r < s < \eta$ となる有理数 s がある。 a^η は D_η の上限であるから $a^s \leq a^\eta$ である。よって
 $a^r < a^s \leq a^\eta$ つまり $a^x < a^y$
- (iv) $x = \xi$ も, $y = \eta$ も無理数のとき。
 $\xi < r < \eta$ なる有理数がある。上の議論より $a^\xi < a^r$ かつ $a^r < a^\eta$ であるから $a^\xi < a^\eta$
 となる。■

(10) a^x は連続である。

$\lim_{x \rightarrow \beta} a^x = a^\beta$ を言う。

$\beta < \xi$ なる実数をとって固定する。

$r < s < \xi$ なる有理数 r, s に対して

$$a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1) < a^\xi(a^{s-r} - 1) \cdots 1$$

(6) より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0$ であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $a^\xi \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon$ となる自然数 n が存在する。よって $\delta_1 = \frac{1}{n}$ とおけば, 1 より $r < s < \xi$ で $s - r < \delta_1$ のとき

$$a^s - a^r < a^\xi(a^{s-r} - 1) < a^\xi(a^{\delta_1} - 1) = a^\xi \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon$$

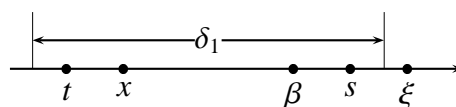
つまり

$$r < s < \xi \text{ かつ } s - r < \delta_1 \implies a^s - a^r < \varepsilon \cdots 2 \text{ である。}$$

さて, $|x - \beta| < \delta_1$ かつ $x, \beta < \xi$ とする。

このとき $x < \beta$ なら $t < x < \beta < s$ なる有理数 s, t で $s - t < \delta_1$ なるものが存在するので

$$a^\beta - a^x < a^s - a^t < \varepsilon$$



となる。

$\beta < x$ なら $t < \beta < x < s$ なる有理数 s, t で $s - t < \delta_1$ なるものが存在するので

$$a^x - a^\beta < a^s - a^t < \varepsilon$$

となる。よって、 $|x - \beta| < \delta_1$ かつ $x, \beta < \xi$ のとき $|a^x - a^\beta| < \varepsilon$ となる。

$\delta = \min(\delta_1, |\beta - \xi|)$ とおけば、 $|x - \beta| < \delta$ のとき、 $|x - \beta| < \delta_1$ かつ $x, \beta < \xi$ となるから

$$|x - \beta| < \delta \implies |a^x - a^\beta| < \varepsilon$$

となる。■

以上で、 $a > 1$ のとき、全実数に対して a^x が定義され、これは連続で単調増加であることが分かった。

$a = 1$ のときは、つねに $a^x = 1^x = 1$ である。

$0 < a < 1$ のときは $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ と定める。

この定義において、 $x = r$ が有理数のときには $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = (a^{-1})^{-r} = a^r$ となるので以前に定義したものと一致する。