

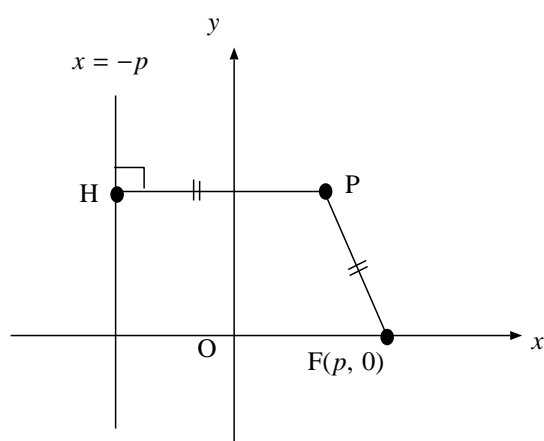
2次曲線

I.	標準形と離心率	3
1	放物線	3
2	楕円	5
3	双曲線	8
4	離心率	11
II.	実2次対称行列と2次曲線	17
1	実2次対称行列	17
2	2次曲線	19
III.	円錐曲線	21
1	放物線	21
2	楕円	22
3	双曲線	23

ST CO LIBRARY

I. 標準形と離心率

1 放物線



定点 F と定直線 l から等距離にある点 P の軌跡を放物線といい, F をこの放物線の焦点, l を準線と言う。

xy 平面上で, $F(p, 0)$ を焦点とし, $x = -p$ を準線とする放物線 C の方程式を求める。
 $P(x, y)$ を C 上の点とすると,

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

である。従って

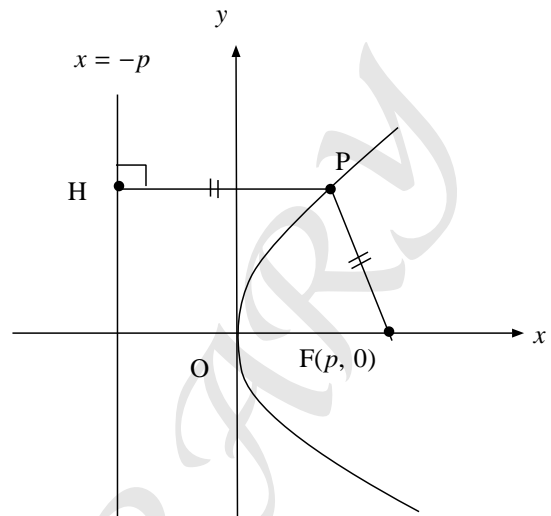
$$\begin{aligned}(x-p)^2 + y^2 &= (x+p)^2 \\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \\ y^2 &= 4px\end{aligned}$$

となる。この方程式 $y^2 = 4px$ を放物線の標準形という。

放物線の標準形 I

$y^2 = 4px$ は放物線を表わし

- (1) その焦点は $(p, 0)$
- (2) 準線は $x = -p$ である。

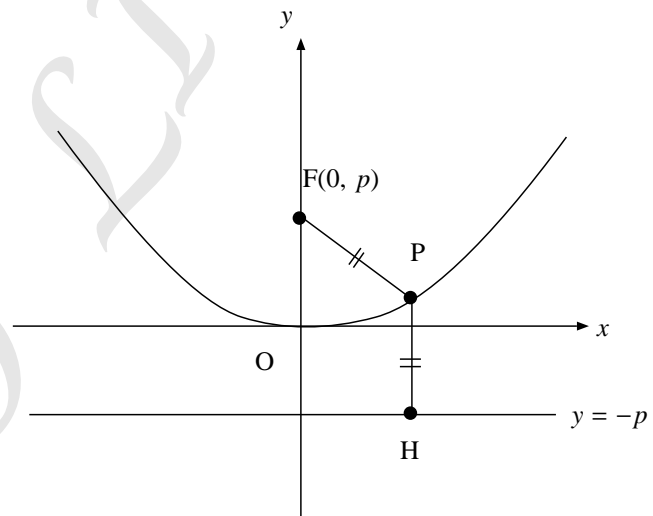


x と y の役割を入れ替えて考えると,

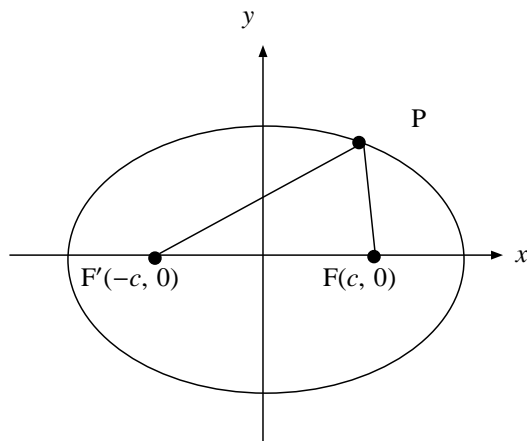
放物線の標準形 II

$x^2 = 4py$ は放物線を表わし

- (1) その焦点は $(0, p)$
- (2) 準線は $y = -p$ である。



2 楕円



2 定点 F, F' からの距離の和が一定であるような点の軌跡を楕円といい, F, F' をこの楕円の焦点という。

$F(c, 0), F'(-c, 0)$ を焦点とし, この 2 点からの距離の和が $2a$ ($a > c > 0$) であるような点 $P(x, y)$ の軌跡を求めてみる。

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \dots\dots 1$$

を変形すると

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right) \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)$$

$$= 2a \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)$$

$$-4cx = 2a \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -\frac{2cx}{a} \dots\dots 2$$

となる。 1 + 2 より

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{cx}{a} \dots\dots 3$$

1 · 2 より

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{cx}{a} \dots\dots 4$$

を得る。そして 1 は, 3 かつ 4 と同値である。まず 3 を変形する。

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a - \frac{cx}{a} \\ \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 &= a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} \text{ かつ } a - \frac{cx}{a} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \text{ かつ } x \leq \frac{a^2}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \text{ かつ } x \leq \frac{a^2}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1 \text{ かつ } x \leq \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

となる。そこで $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ つまり, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ とおくと

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ かつ } x \leq \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

となる。一方, 同様の変形を 4 に対して行うと

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{cx}{a} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1 \text{ かつ } x \geq -\frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

となる。よって c を書き直すと

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ かつ } x \geq -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

となる。以上で

$$1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ かつ } -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \leq x \leq \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

である。しかし $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ のとき $-a \leq x \leq a$ であるから

$-\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \leq x \leq \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ の条件は自動的に満たされる。よって

$$1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

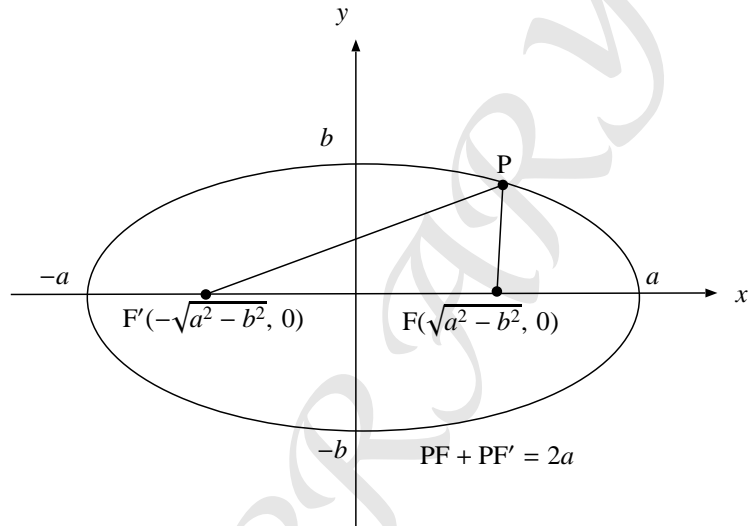
となる。この方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を楕円の標準形という。

楕円の標準形 I

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

は

- (1) 長半径 a , 短半径 b の楕円を表わし
- (2) その焦点は $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
- (3) 2焦点からの距離の和は $2a$ である。



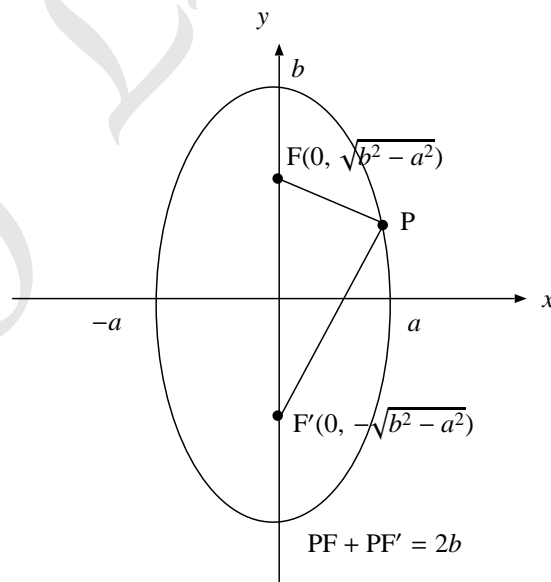
x と y , a と b の役割を入れ替えると

楕円の標準形 II

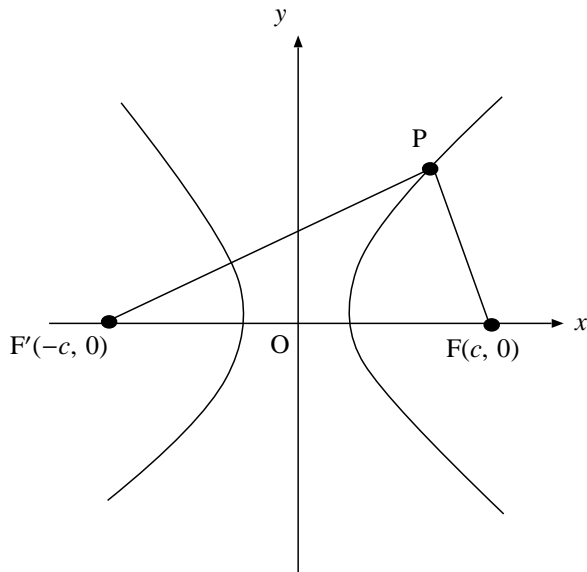
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0)$$

は

- (1) 長半径 b , 短半径 a の楕円を表わし
- (2) その焦点は $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$
- (3) 2焦点からの距離の和は $2b$ である。



3 双曲線



2 定点 F, F' からの距離の差が一定であるような点の軌跡を双曲線といい, F, F' を焦点という。

$F(c, 0), F'(-c, 0)$ とし, この 2 点からの距離の差が $2a$ ($c > a > 0$) であるような点 $P(x, y)$ の軌跡を求める。

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a \cdots 1 \end{aligned}$$

を変形すると

$$\begin{aligned} &(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}) \\ &= \pm 2a(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}) \\ -4cx &= \pm 2a(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}) \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \mp \frac{2cx}{a} \end{aligned}$$

となる。 1 + 2 より

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm \left(a - \frac{cx}{a} \right) \cdots 3$$

1 · 2 より

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \mp \left(a + \frac{cx}{a} \right) \cdots 4$$

となる。そして 1 と, 3 かつ 4 は同値である。

3 を変形する。

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm \left(a - \frac{cx}{a} \right) \\ \Leftrightarrow \\ (x-c)^2 + y^2 &= a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2} x^2 \\ \Leftrightarrow \\ \frac{c^2 - a^2}{a^2} x^2 - y^2 &= c^2 - a^2 \end{aligned}$$

となる。そこで $b^2 = c^2 - a^2$ つまり, $a^2 + b^2 = c^2$ とおくと

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

となる。一方 4 を変形すると同じく $\frac{c^2 - a^2}{a^2} x^2 - y^2 = c^2 - a^2$ を得て, やはり $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ となる。

この方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を双曲線の標準形という。

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ において, 両辺に $\frac{b^2}{x^2}$ を掛けると

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{x^2}$$

となるので, ここで $x \rightarrow \pm\infty$ とすると

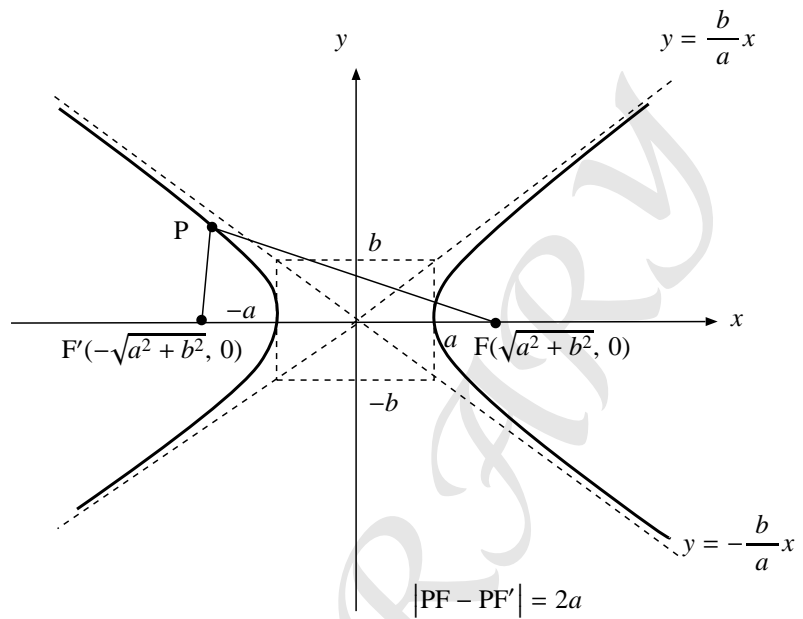
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{y^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b^2}{x^2} = 0$$

となる。従って, $x \rightarrow \pm\infty$ とするとき双曲線上の点 (x, y) は図形 $\frac{b^2}{a^2} - \frac{y^2}{x^2} = 0$ 上の点に近づく。 $\frac{b^2}{a^2} - \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{b}{a} - \frac{y}{x} \right) \left(\frac{b}{a} + \frac{y}{x} \right)$ であるから, $\frac{b^2}{a^2} - \frac{y^2}{x^2} = 0$ は 2 直線 $y = \pm \frac{b}{a} x$ を表わしている。よって, これが漸近線の方程式となる。

双曲線の標準形 I

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ は}$$

- (1) y 軸の両側に 2 曲線が現れるような双曲線で
- (2) 焦点は $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ であり
- (3) 2 焦点からの距離の差は $2a$ である。

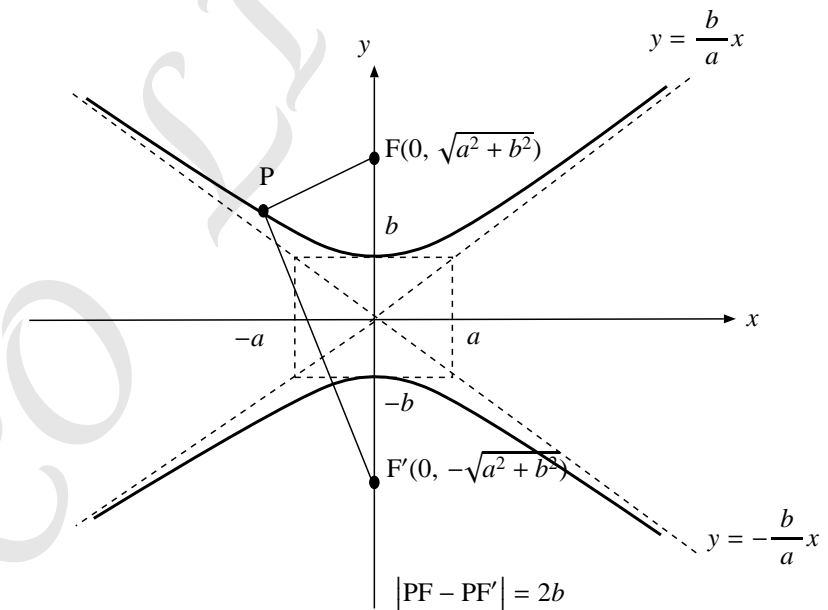


x と y , a と b の役割を入れ替えると

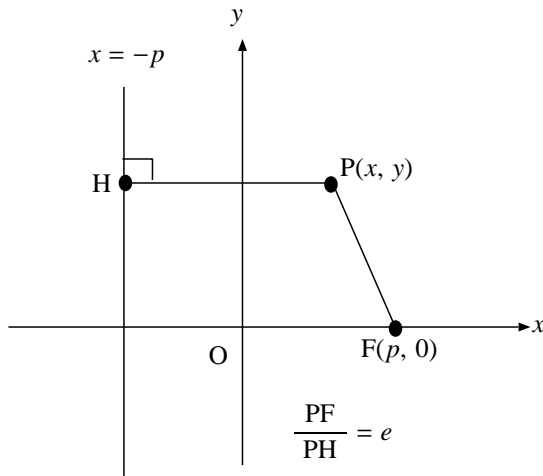
双曲線の標準形 II

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ は}$$

- (1) x 軸の両側に 2 曲線が現れるような双曲線で
- (2) 焦点は $(0, \pm\sqrt{a^2+b^2})$ であり
- (3) 2 焦点からの距離の差は $2b$ である。



4 離心率



定点 F からの距離と定直線 l からの距離との比が一定値 e であるような点 P の軌跡 C を考える。 F を C の焦点, l を C の準線, e を C の離心率という。

F を通り l に垂直な直線を x 軸にとり, l と x 軸の交点と F の中点を原点にとって xy 座標系を入れる。 $F(p, 0)$, $l: x = -p$ とする。 $P(x, y)$ とし, P から l に下ろした垂線の足を H とする。

仮定から $\frac{PF}{PH} = e$ であるから

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|x - (-p)|} = e$$

である。これを計算する。

$$\frac{(x-p)^2 + y^2}{(x+p)^2} = e^2$$

$$(x+p)^2 e^2 = (x-p)^2 + y^2$$

$$(1 - e^2)x^2 - 2p(1 + e^2)x + y^2 = (e^2 - 1)p^2 \dots 1$$

1 において $e = 1$ のときは

$$y^2 = 4px$$

となりこれは放物線である。また $0 < e < 1$ のときは 1 は

$$\frac{\left(x - \frac{1+e^2}{1-e^2}p\right)^2}{\left(\frac{2ep}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2ep}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1 \dots 2$$

となるので楕円である。そして $e > 1$ のときは 1 は

$$\frac{\left(x + \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}p\right)^2}{\left(\frac{2ep}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2ep}{\sqrt{e^2 - 1}}\right)^2} = 1 \cdots 3$$

となるので双曲線である。以上で次が示された。

定理

e を離心率とすると

- (1) $0 < e < 1$ のとき楕円 (2) $e = 1$ のとき放物線 (3) $e > 1$ のとき双曲線

となる。

さて, 2 において

$$c = \frac{1 + e^2}{1 - e^2}p \cdots 4 \quad a = \frac{2ep}{1 - e^2} \cdots 5 \quad b = \frac{2ep}{\sqrt{1 - e^2}} \cdots 6$$

とおくと $a > b > 0$ で $\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ となる。これを x 軸方向に $-c$ だけ平行移動す

ると $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots 7$ となる。従って 7 の離心率は 2 の離心率と一致し^{注1}, 焦点は 2 の焦点 $(p, 0)$ を x 軸方向に $-c$ だけ平行移動して $(p - c, 0)$ となる。また準線は 2 の準線 $x = -p$ を x 軸方向に $-c$ だけ平行移動して $x = -p - c$ となる。ここで e, p, c

を a, b で表わしてみる。6 を 5 で割って整理すると $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ となる。一方 5

より $p = \frac{1 - e^2}{2e}a \cdots 8$ である。8 を 4 に代入すると $c = \frac{1 + e^2}{2e}a$ となる。従って

$p - c = -ae$, $-p - c = -\frac{a}{e}$ となる。以上で $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) の離心率は

$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ であり, 焦点は $(-ae, 0)$, 準線は $x = -\frac{a}{e}$ となる。ここで $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

が y 軸に関して対称であることを考えると $(ae, 0)$, $x = \frac{a}{e}$ も焦点・準線であることが分かる。

^{注1} 2 と 7 は合同な図形である。

同様に, 3 において

$$c = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} p, \quad a = \frac{2ep}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{2ep}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

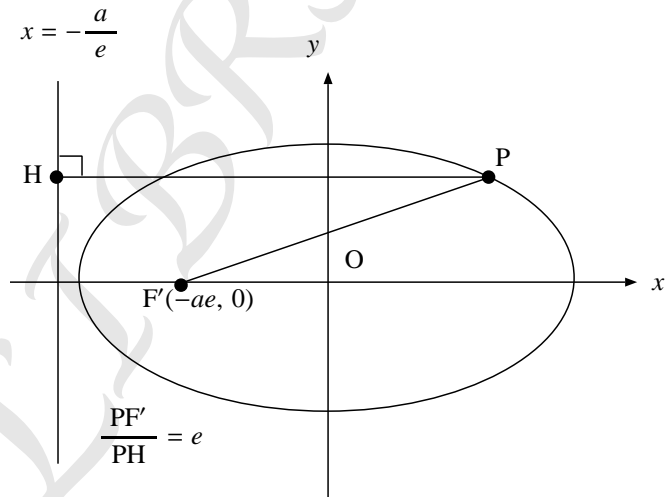
とにおいて同じ議論をすれば, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) の離心率は $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ であり, 焦点と準線は 2 組あって, $(-ae, 0)$ が焦点のときは $x = -\frac{a}{e}$ が準線であり, $(ae, 0)$ が焦点のときは $x = \frac{a}{e}$ が準線となる。

以上より次が示された。

楕円の離心率 I (左側の焦点と準線)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{ の}$$

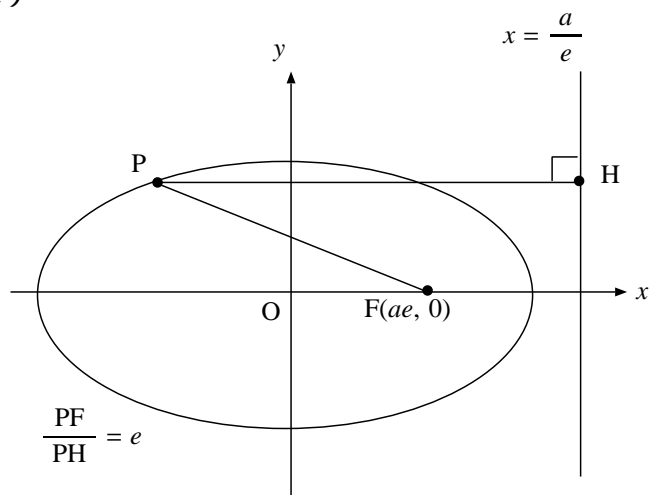
- (1) 離心率は $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
- (2) 焦点は $(-ae, 0)$
- (3) 準線は $x = -\frac{a}{e}$



楕円の離心率 II (右側の焦点と準線)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{ の}$$

- (1) 離心率は $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
- (2) 焦点は $(ae, 0)$
- (3) 準線は $x = \frac{a}{e}$



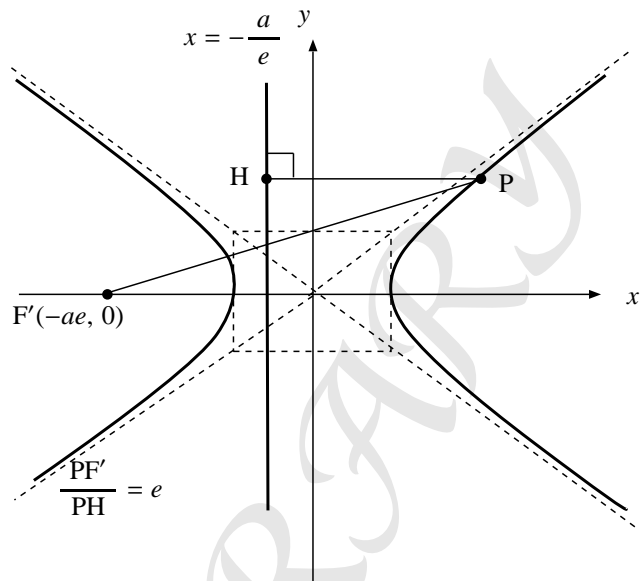
双曲線の離心率 I (左側の焦点と準線)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{ の}$$

$$(1) \text{ 離心率は } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$(2) \text{ 焦点は } (-ae, 0)$$

$$(3) \text{ 準線は } x = -\frac{a}{e}$$



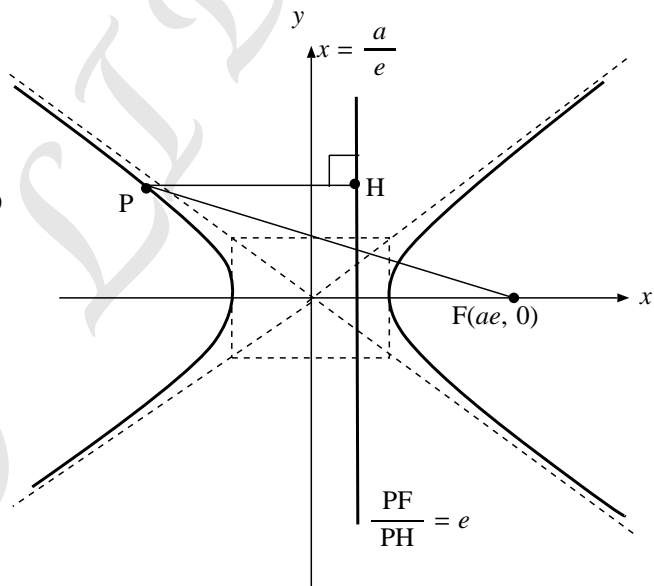
双曲線の離心率 II (右側の焦点と準線)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{ の}$$

$$(1) \text{ 離心率は } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$(2) \text{ 焦点は } (ae, 0)$$

$$(3) \text{ 準線は } x = \frac{a}{e}$$



[離心率の応用 (楕円の極方程式)]

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)... 1 の離心率を e , 焦点を $F(ae, 0)$, 準線を $g: x = \frac{a}{e}$ とする。1 上の任意の点 P に対し, x 軸の正の方向から FP へはかった角を θ とし, そして FP の長さを r とすると

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

となることを示す。 r, θ の取り方から, $P(ae + r \cos \theta, r \sin \theta)$ である。 P から g へ下ろした垂線の足を H とするとき $PF = ePH$ である。そして $PF = r$, $PH = \frac{a}{e} - (ae + r \cos \theta)$ であるから

$$r = e \left\{ \frac{a}{e} - (ae + r \cos \theta) \right\}$$

となる。よって $r = a - ae^2 - re \cos \theta$ であるから, これより $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$ となり示された。

ST CO LIBRARY

II. 実 2 次対称行列と 2 次曲線

1 実 2 次対称行列

行列 A の行と列を入れ換えたものを A' と書き, A の転置行列という。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である。 $A' = A$ となるとき A は対称行列であるという。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ であるから, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ となり, $b = c$ である。 よって, 対称行列は $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ の形をしていることが分かる。

\vec{x} と \vec{y} の内積は $\vec{x} \cdot \vec{y} = {}^t\vec{x} \vec{y}$ ^{注1} であることに注意すると次の定理を証明することができる。

定理 1

A を実 2 次対称行列 (成分がすべて実数の 2 次対称行列) とする。 このとき次が成り立つ。

- (1) A の固有値はすべて実数である。
- (2) A は互いに直交する固有ベクトルをもつ。

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ とおくと, A の固有方程式は $x^2 - (a+d)x + ad - b^2 = 0$ となる。 これの判別式をとると $D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2 = (a-d)^2 + 4b^2$ となるのでつねに $D \geq 0$ となり示された。

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ において $b = 0$ なら

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

^{注1} 左辺は内積であり, 右辺は行列の積である。

であるから, 互いに直交する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもつ。そこで以下では $b \neq 0$ とする。そうすると, (1) で見たことから固有方程式の判別式は正となるので, A は相異なる2つの固有値 α, β をもつ。

$\alpha \longleftrightarrow \vec{v}$, $\beta \longleftrightarrow \vec{u}$ ^{注2} とする。 $A\vec{v}$ と \vec{u} の内積を考える。

$$\begin{aligned} (A\vec{v}) \cdot \vec{u} &= {}^t(A\vec{v})\vec{u} \\ &= \vec{v}^t A \vec{u} \quad \text{☞ 一般に } {}^t(AB) = {}^t B^t A \\ &= \vec{v}^t (A\vec{u}) \\ &= \vec{v}^t (A\vec{u}) \quad \text{☞ } A \text{ は対称行列なので } {}^t A = A \text{ である} \\ &= \vec{v} \cdot (A\vec{u}) \end{aligned}$$

となる。ここで $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$, $A\vec{u} = \beta\vec{u}$ であるから

$$(A\vec{v}) \cdot \vec{u} = (\alpha\vec{v}) \cdot \vec{u} = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{u})$$

$$\vec{v} \cdot A\vec{u} = \vec{v} \cdot (\beta\vec{u}) = \beta(\vec{v} \cdot \vec{u})$$

となる。よってこれを代入すると

$$\alpha(\vec{v} \cdot \vec{u}) = \beta(\vec{v} \cdot \vec{u})$$

$$(\alpha - \beta)(\vec{v} \cdot \vec{u}) = 0$$

となる。ここで $\alpha - \beta \neq 0$ であるから $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ となり示された。■

A を実2次対称行列とし $\alpha \longleftrightarrow \vec{v}$, $\beta \longleftrightarrow \vec{u}$ とする。上の定理より \vec{v} と \vec{u} は直交する。 x 軸正の方向から \vec{v} へはかった角を θ とすると $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ は \vec{v} に平行なので, やはり α に対する固有ベクトルである。また β に対する固有ベクトルは α に対する固有ベクトルに直交するので $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ は β に対する固有ベクトルである。以上で次が分かった。

注2 \vec{w} が λ に対する固有ベクトルであることを $\lambda \longleftrightarrow \vec{w}$ と表すことにする。

定理 2 (対称行列の対角化)

A を実 2 次対称行列とし, α, β を固有値とする。 x 軸正の方向から α に対する固有ベクトルへはかった角を θ とすると

$$\alpha \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \beta \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。従って $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とおくと P は回転行列で

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad ({}^tP = P^{-1} \text{ に注意})$$

となる。

2 2次曲線

x, y に関する 2 次式

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \cdots 1$$

で表される曲線を 2 次曲線という。 1 を行列を用いて表すと

$$(x \ y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d \ e) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \cdots 2$$

となる。 $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ とおくと, A は実 2 次対称行列で 2 は

$$(x \ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d \ e) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \cdots (*)$$

と書ける。 A は実 2 次対称行列であるから (定理 2) で見たように ${}^tP = P^{-1}$ なる行列 P を用いて ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のように対角化される^{注3}。そこで $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおく。

^{注3} α, β は A の固有値で, α, β に対応する固有ベクトルを並べて作った行列が P である。

$(x \ y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} P = (X \ Y) P$ であることに注意すると (*) は

$$(X \ Y) P A P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + (d \ e) P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f = 0$$

となる。ここで $P A P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ であったから

$$(X \ Y) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + (d \ e) P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f = 0 \cdots 3$$

を得る。 $(d \ e) P = (g \ h)$ とおくと 3 は

$$(X \ Y) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + (g \ h) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f = 0$$

となる。この左辺を実際に計算すると

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + gX + hY + f = 0 \cdots 4$$

となる。4 は平方完成することで、表す図形が具体的に分かる。 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ であるから、 P の表す線形変換で 4 をうつした図形が 1 である。しかし P は回転行列であったから 4 と 1 は合同な図形である。以上で 1 の形を知ることができた。

4 は、空集合、1 点、直線などの例外的な場合を除いて、楕円・双曲線・放物線を表すから、1 も例外を除いて楕円・双曲線・放物線を表す。

また、4 が楕円・双曲線・放物線を表すとき (このとき 1 も楕円・双曲線・放物線を表す) 4 がある直線 ℓ に関して線対称な図形になっているとすると、4 の方程式の形

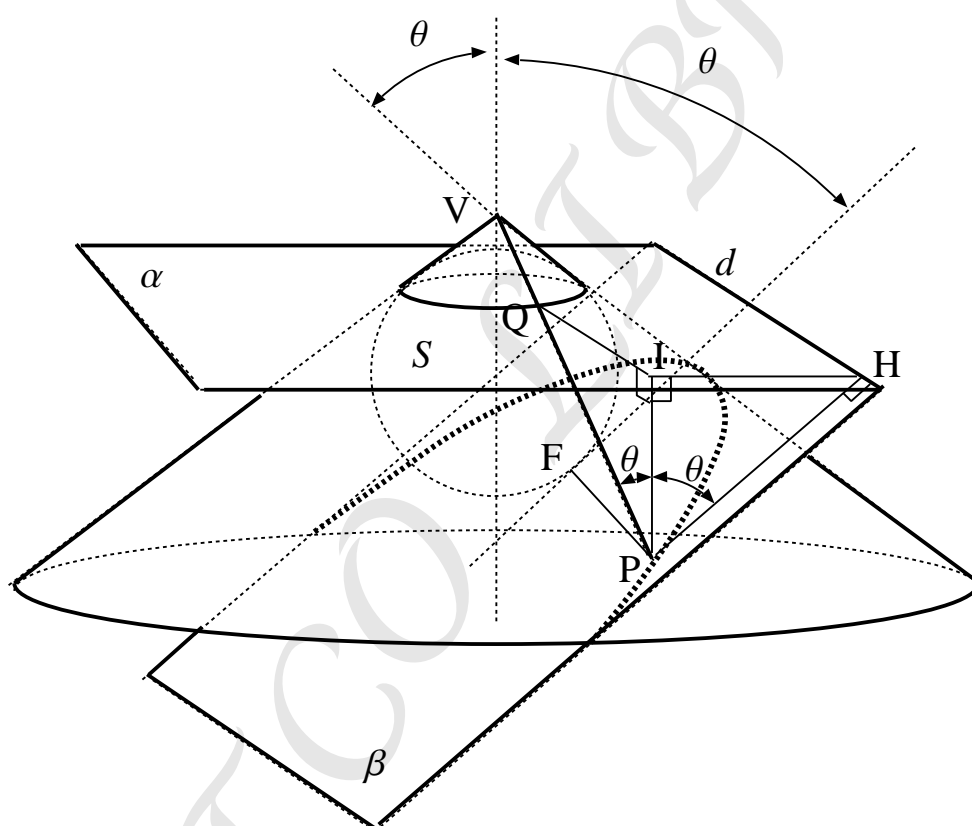
から、 $\ell \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ または $\ell \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ でなければならない。これを P の表す線形変換でうつすと

$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は A の固有値 α に対する固有ベクトルであり、 $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 β に対する固有ベクトルである。従って 1 が対称軸をもつならそれは、 A の固有ベクトルに平行な直線でなければならないことが分かる。

III. 円錐曲線

放物線・楕円・双曲線は，円錐と平面の交線として得られることを，円錐に内接する球を利用して図形的に納得しよう。球と平面の接点が焦点となる。

1 放物線

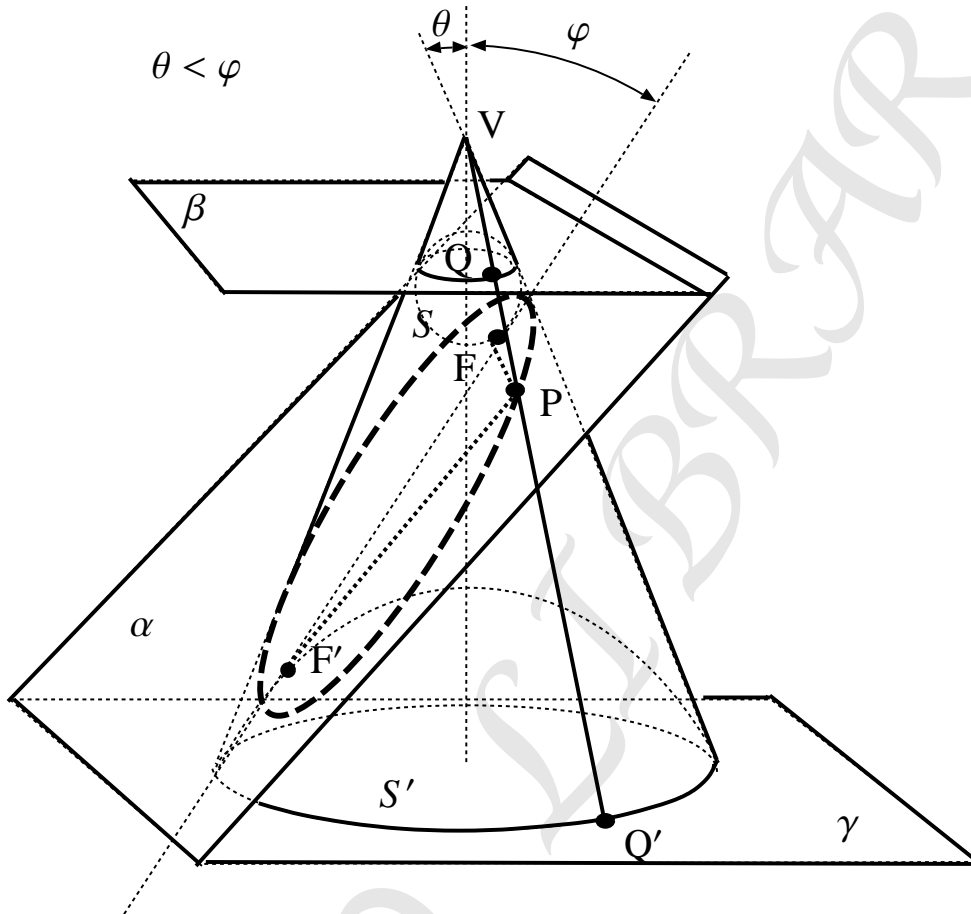


球面 S は，円錐面と接し，接点の作る円は平面 α 上にある。また，平面 β と球面は F で接している。更に，2平面 α と β の交線を d とする。このとき，平面 β と円錐面の交線は， F を焦点， d を準線とする放物線である。

実際， $IPQ = IPH = \theta$ であるから，直角三角形 $IPQ \cong IPH$ となり， $PQ = PH$

である。一方, P から球面に引いた接線の長さは等しいので $PQ = PF$ である。
 よって $PF = PH$ となり, C は F を焦点, d を準線とする放物線である。

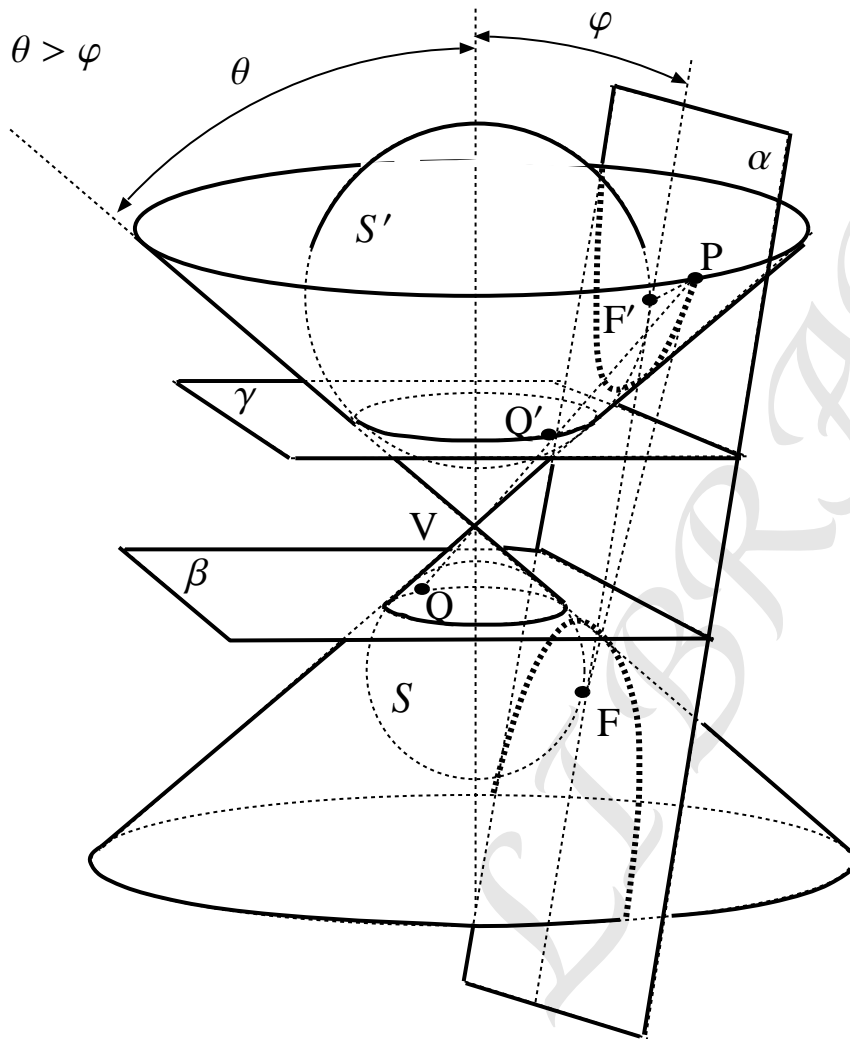
2 楕円



平面 α が円錐面と交わっている。球面 S, S' は平面 α とそれぞれ F, F' で接し, 更に円錐面に接している。円錐面と球面 S との接点の作る円を含む平面を β , 円錐面と球面 S' との接点の作る円を含む平面を γ とする。このとき, 円錐面と平面 α の交線は F, F' を2焦点とする楕円である。

実際, P から球面 S へ引いた接線の長さは等しいので, $PF = PQ$ である。また, P から球面 S' へ引いた接線の長さは等しいので, $PF' = PQ'$ である。従って $PF + PF' = PQ + PQ'$ となるが, Q, P, P' および, 円錐の頂点 V は1直線上にあるので, $PQ + PQ' = QQ'$ (一定) となり, $PF + PF' = (\text{一定})$ である。よって C は F, F' を2焦点とする楕円である。

3 双曲線



平面 α が円錐面と交わっている。球面 S, S' は円錐面と接していて、平面 α とはそれぞれ F, F' で接している。球面 S と円錐面との接点の作る円を含む平面を β 、球面 S' と円錐面との接点の作る円を含む平面を γ とする。円錐面と平面 α の交線は F, F' を 2 焦点とする双曲線である。

実際、 P から球面 S へ引いた接線の長さは等しいので、 $PF = PQ$ である。また、 P から球面 S' へ引いた接線の長さは等しいので、 $PF' = PQ'$ である。従って $|PF - PF'| = |PQ - PQ'|$ となるが、 Q, P, P' および、円錐の頂点 V は 1 直線上にあるので、 $|PQ - PQ'| = QQ'$ (一定) となり、 $|PF - PF'| = (\text{一定})$ である。よって C は F, F' を 2 焦点とする双曲線である。