

期待値に関する公式

確率変数^{注1} X の取り得る値を x_1, x_2, \dots, x_n とし, $X = x_i$ となる確率を

$$p_i = P(X = x_i)$$

とするとき

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

を X の期待値 (平均) という。期待値の和・積に関する定理を示す。

(期待値の和の公式) 2つの確率変数 X, Y に対し

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

が成り立つ。

X の取り得る値を x_1, x_2, \dots, x_n , Y の取り得る値を y_1, y_2, \dots, y_m とすると $X + Y$ の取り得る値は $x_i + y_j$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$) となる。そこで $X = x_i$ かつ $Y = y_j$ となる確率を $P(X = x_i \text{ かつ } Y = y_j) = p_{ij}$ とおく。そうすると期待値の定義より

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}(x_i + y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}y_j \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m p_{ij} \right) x_i + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} \right) y_j \end{aligned}$$

となる。ここで $X = x_i$ となるのは

$$\begin{array}{l} X = x_i \quad \text{かつ} \quad Y = y_1 \\ X = x_i \quad \text{かつ} \quad Y = y_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ X = x_i \quad \text{かつ} \quad Y = y_m \end{array}$$

^{注1}ある試行において, どの事象がおこるかによって X のとりうる値が定まるとき, X を確率変数と言う。

のいずれかのときであることに注意すると

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m p_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^m P(X = x_i \text{かつ} Y = y_j) \\
 &= P(X = x_i \text{かつ} Y = y_1) + P(X = x_i \text{かつ} Y = y_2) + \cdots \\
 &\quad \cdots + P(X = x_i \text{かつ} Y = y_m) \\
 &= P(X = x_i)
 \end{aligned}$$

となる。同様に $\sum_{i=1}^n p_{ij} = P(Y = y_j)$ であるから

$$\begin{aligned}
 E(X + Y) &= \sum_{i=1}^n P(X = x_i) x_i + \sum_{j=1}^m P(Y = y_j) y_j \\
 &= E(X) + E(Y)
 \end{aligned}$$

となり示された。■

(期待値の積の公式) 2つの確率変数 X, Y が独立^{注2} ならば

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

が成り立つ。

X の取り得る値を x_1, x_2, \dots, x_n , Y の取り得る値を y_1, y_2, \dots, y_m とすると XY の取り得る値は $x_i y_j$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$) となる。 X, Y は独立であるから $P(X = x_i) = p_i, P(Y = y_j) = q_j$ とおくと

$$P(X = x_i \text{かつ} Y = y_j) = p_i q_j$$

となる。よって期待値の定義から

$$E(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (p_i q_j) (x_i y_j)$$

^{注2} 確率変数 X, Y が独立であるとは, X, Y のとりうる値をそれぞれ $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ とするとき, すべての i, j に対して $P(X = x_i \text{かつ} Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ が成立つことである。

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (p_i q_j) (x_i y_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(p_i x_i \sum_{j=1}^m q_j y_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (p_i x_i E(Y)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i \right) E(Y) \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

となり示された。■

[注] 和の公式は X, Y が独立でないときも成立するが、積の公式は独立でないときは一般には成立しない。