

## 分散に関する公式

確率変数  $X$  の期待値 (平均) を  $m$  とするとき  $(X - m)^2$  の期待値 (平均) を  $X$  の分散とい  
い  $V(X)$  と表わす。  $X$  の取り得る値を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とし,  $P(X = x_i) = p_i$  とするとき注1

$$V(X) = \sum_{k=1}^n p_i (x_i - m)^2, \text{ 但し } m = E(X)$$

である。また  $V(X)$  の正の平方根を標準偏差といって  $D(x)$  あるいは  $\sigma_X$  と表わす。

$$D(X) = \sigma_X = \sqrt{V(x)}$$

まず, 2乗平均と分散の関係を示しておく。

(2乗平均と分散)  $X$  を確率変数とするとき

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

が成り立つ。

$X$  の取り得る値を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とし, また  $P(X = x_1) = p_1, P(X = x_2) = p_2, \dots, P(X = x_n) = p_n$ , さらに  $E(X) = m$  とおく。そうすると分散の定義から

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{k=1}^n p_i (x_i - m)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n p_i (x_i^2 - 2mx_i + m^2) \\ &= \sum_{k=1}^n p_i x_i^2 - 2m \sum_{k=1}^n p_i x_i + m^2 \sum_{k=1}^n p_i \end{aligned}$$

である。ここで,  $X^2 = x_i^2$  となる確率は  $p_i$  であるから  $\sum_{k=1}^n p_i x_i^2 = E(X^2)$  であり, また  $m =$

注1  $X = x_i$  となる確率を  $P(X = x_i) = p_i$  で表わす。

$E(X) = \sum_{k=1}^n p_k x_k$  より  $m \sum_{k=1}^n p_k x_k = \{E(X)\}^2$  である。そして  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$  にも注意すると

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{k=1}^n p_k x_k^2 - 2m \sum_{k=1}^n p_k x_k + m^2 \sum_{k=1}^n p_k \\ &= E(X^2) - 2\{E(X)\}^2 + \{E(X)\}^2 \\ &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \end{aligned}$$

となり示された。■

分散の和の公式を示す。X, Y が独立のときにしかこの公式は成り立たない。

(分散の和の公式) 2つの確率変数 X, Y が独立ならば

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

が成り立つ。

上の定理より

$$V(X + Y) = E\{(X + Y)^2\} - \{E(X + Y)\}^2$$

である。従って

$$V(X + Y) = E(X^2 + 2XY + Y^2) - \{E(X + Y)\}^2$$

であるが、期待値の和の公式を使うと

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\ &\quad - \{E(X) + E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\ &\quad - \{E(X)\}^2 - 2E(X)E(Y) - \{E(Y)\}^2 \end{aligned}$$

となる。さらに、X, Y が独立であるから期待値の積の公式より  $E(XY) = E(X)E(Y)$  である。従って

$$\begin{aligned} &V(X + Y) \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\ &\quad - \{E(X)\}^2 - 2E(X)E(Y) - \{E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - \\ &\quad \{E(X)\}^2 - 2E(X)E(Y) - \{E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 + E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 \\ &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

となり示された。■

**[注]** たとえ  $X$  と  $Y$  が独立であっても、分散については積の公式は成り立たない。例えば  $X$  と  $Y$  は独立で

$X$	1
$P(X)$	1

$Y$	0	1
$P(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

とすると

$XY$	0	1
$P(XY)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

となり、 $E(X) = 1$ 、 $E(Y) = \frac{1}{2}$ 、 $E(XY) = \frac{1}{2}$  であるから

$$V(X) = (1 - 1)^2 \cdot 1 = 0$$

$$V(Y) = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$V(XY) = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となり

$$V(X)V(Y) = 0 \neq \frac{1}{4} = V(XY)$$

である。