

## 凸不等式と相加相乗平均の不等式

### 1. 凸不等式

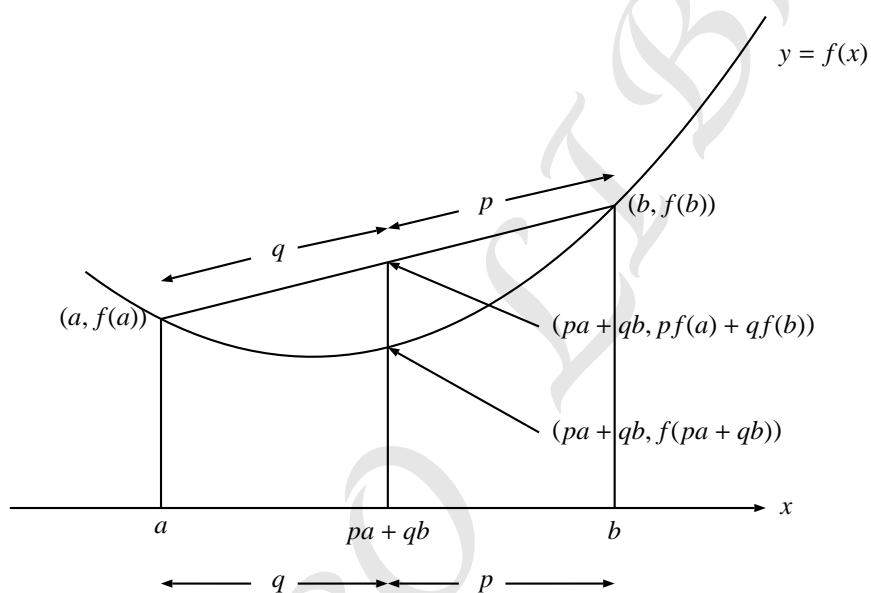
関数  $f(x)$  が

$$p + q = 1, p \geq 0, q \geq 0 \implies f(pa + qb) \leq pf(a) + qf(b)$$

を満たすとき  $f(x)$  は「下に凸」であるという。また

$$p + q = 1, p \geq 0, q \geq 0 \implies f(pa + qb) \geq pf(a) + qf(b)$$

を満たすとき  $f(x)$  は「上に凸」であるという。



関数  $f(x)$  の2階導関数の符号で、凹凸が判定できることを示そう。

## (凹凸の判定)

(1) つねに  $f''(x) > 0$  ならば  $f(x)$  は下に凸である。

(2) つねに  $f''(x) < 0$  ならば  $f(x)$  は上に凸である。

どちらも同様なので, (1) のみ示す。

$f(x)$  はつねに  $f''(x) > 0$  を満たすとする。

$p + q = 1, p > 0, q > 0 \cdots 1$  なら  $f(pa + qb) \leq pf(a) + qf(b)$  が成り立つことを言えばよい。

$F(x) = pf(x) + qf(b) - f(px + qb)$  とおいて  
 $F(x)$  の増減を調べる。

$$\begin{aligned} F'(x) &= pf'(x) - pf'(px + qb) \\ &= p\{f'(x) - f'(px + qb)\} \end{aligned}$$

である。ここで, 1 に注意すると  $px + qb$  は数直線上で  $x$  と  $b$  を  $q : p$  に内分する点である。

従って

$$x < b \text{ のとき } x < px + qb \quad x = b \text{ のとき } x = px + qb \quad x > b \text{ のとき } x > px + qb$$

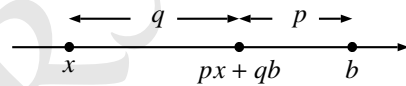
となる。ところが, いま  $f''(x) > 0$  であるから  $f'(x)$  は単調増加。従って

$$x < b \text{ のとき } f'(x) < f'(px + qb) \text{ つまり } F'(x) < 0$$

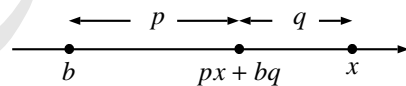
$$x = b \text{ のとき } f'(x) = f'(px + qb) \text{ つまり } F'(x) = 0$$

$$x > b \text{ のとき } f'(x) > f'(px + qb) \text{ つまり } F'(x) > 0$$

$x < b$  のとき



$x > b$  のとき



そして  $x = b$  のとき  $p + q = 1$  に注意すると

$$F(b) = pf(b) + qf(b) - f(pb + qb) = (p+q)f(b) - f((p+q)b) = f(b) - f(b) = 0$$

となる。よって、 $F(x)$  の増減表は右ようになる。従って、つねに  $F(x) \geq 0$  であり、また  $F(x) = 0$  となるのは  $x = b$  のときである。 $x$  に  $a$  を代入すれば

$x$	.....	$b$	.....
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	↘	0	↗

$$f(pa + qb) \leq pf(a) + qf(b)$$

であり、またここで等号が成立するのは  $a = b$  のときである。■

## 2. 相加相乗平均の不等式

関数の凸性を利用して、「相加相乗平均の不等式」を証明しよう。

ここでは、対数関数の凸性を利用して証明するのだが、そのために次を準備する。

### (凸不等式)

(1) つねに  $f''(x) > 0$  ( $f(x)$  は下に凸) とする。

$\sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i > 0$  のとき  $f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$  である。また、等号成立は  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  のときである。

(2) つねに  $f''(x) < 0$  ( $f(x)$  は上に凸) とする。

$\sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i > 0$  のとき  $f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$  である。また、等号成立は  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  のときである。

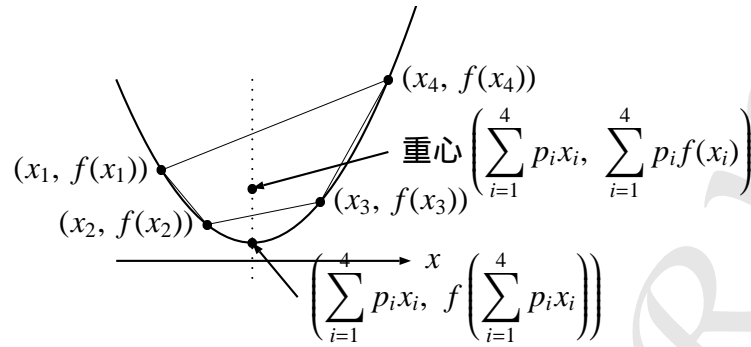
[注] (1) の図形的意味は次の通りである。

$n$  個の質点系  $P_i(x_i, f(x_i))$  ( $1 \leq i \leq n$ ) があって、 $P_i$  の質量を  $p_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) とするとき

$\sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i > 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ) であるとする。そうすると、この質点系の重心  $G$  の座標は

$G\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i, \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)\right)$  である。従って、 $f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$  とは、重心が  $y = f(x)$  の

上側にあるということに他ならない。



(定理の証明) どちらも同様なので (1) のみ示す。

$n$  についての数学的帰納法で示す。

$n = 2$  のときは先に示した定理より, 下に凸であるから正しい。

$n = k$  のとき正しいと仮定して  $n = k + 1$  のとき考える。いま  $\sum_{i=1}^{k+1} p_i = 1, p_i > 0$  である。

そこで  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = p, q = p_{k+1}$  とおくと  $p + q = 1, p > 0, q > 0$  であるから,  $n = 2$  のときには正しいということより

$$f(pa + qb) \leq pf(a) + qf(b) \cdots 1$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i\right) &= f(p_1 x_1 + \dots + p_k x_k + p_{k+1} x_{k+1}) \\ &= f\left(p \cdot \frac{p_1 x_1 + \dots + p_k x_k}{p} + q x_{k+1}\right) \end{aligned}$$

であるから  $a = \frac{p_1 x_1 + \dots + p_k x_k}{p}, b = x_{k+1}$  とおくと

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i\right) &= f(p_1 x_1 + \dots + p_k x_k + p_{k+1} x_{k+1}) \\ &= f\left(p \cdot \frac{p_1 x_1 + \dots + p_k x_k}{p} + q x_{k+1}\right) \\ &= f(pa + qb) \\ &\leq pf(a) + qf(b) \quad \leftarrow 1 \text{ より} \\ &= pf\left(\frac{p_1 x_1 + \dots + p_k x_k}{p}\right) + qf(x_{k+1}) \end{aligned}$$

となる。従って

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i\right) \leq p f\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{p} x_i\right) + q f(x_{k+1}) \cdots 2$$

となる。ところで  $\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^k p_i = \frac{p}{p} = 1$  , さらに  $\frac{p_i}{p} > 0$  である。よって帰納法の仮定から

$$f\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{p} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{p} f(x_i) \cdots 3$$

となる。3 を 2 へ代入して

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i\right) &\leq p \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{p} f(x_i) + q f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k p_i f(x_i) + q f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} p_i f(x_i) \quad \text{☞ } q = p_{k+1} \text{ に注意} \end{aligned}$$

また、等号成立は、2、3の各段階で等号が成立するときである。

2 で等号成立

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{p} x_i &= x_{k+1} \\ \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k &= p x_{k+1} \\ \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k &= (p_1 + p_2 + \cdots + p_k) x_{k+1} \cdots 4 \end{aligned}$$

また

$$3 \text{ で等号成立} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_k \cdots 5$$

5 を 4 に代入すると

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_k) x_1 = (p_1 + p_2 + \cdots + p_k) x_{k+1}$$

つまり  $x_1 = x_{k+1}$  となる。よって 5 より

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x_{k+1}$$

となる。よって、等号成立は  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x_{k+1}$  のときである。以上で  $n = k + 1$  のときも正しくなり、帰納法で示された。■

この定理を使って、相加相乗平均の不等式を示そう。

( 相加相乗平均の不等式 )

$a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  のとき

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

である。ここで等号が成立するのは  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  のときである。

$a_1, a_2, \dots, a_n$  の中にひとつでも 0 となるものがあれば

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq 0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

となるので不等式は成り立つ。また、 $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$  であるから、

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 0 \text{ となるのは } a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \text{ のときに限る}$$

ので示された。

そこで、以下では  $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$  のときに考える。

$f(x) = \log x$  ( $x > 0$ ) とおくと、 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 、 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  である。従って、上の定

理において  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$  とすると

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n} \dots 1$$

であり、等号成立は  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  のときである。また、1 より

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) &\geq \frac{\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n}{n} \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) &\geq \frac{\log(a_1 a_2 \dots a_n)}{n} \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n} \log(a_1 a_2 \dots a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \log\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) &\geq \log(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \\ \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &\geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \end{aligned}$$

となり，不等式は示された。■

### 3. 関数の凸性と最大最小

関数の凸性を利用して最大値・最小値を求める例を考えよう。

(関数の凸性と最大・最小)

(1)  $x_1, x_2, x_3 > 0$  のとき  $\frac{3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right)$  である。

(2)  $0 < x_1, x_2, x_3 < \pi$  のとき  $\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \frac{1}{3} (\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3)$  である。

(3) 半径  $r$  の円に内接する  $\triangle ABC$  の面積  $S$  の最大値は  $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$  である。

(1)  $f(x) = \frac{1}{x}$  とおく。  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$  であるから  $x > 0$  のとき  $f''(x) > 0$  となり， $f(x)$  は下に凸である。よって

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$$

となる。従って  $\frac{3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right)$  である。

(2)  $f(x) = \sin x$  とおく。  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$  となり  $0 < x < \pi$  において  $f''(x) < 0$  であるから， $f(x)$  は上に凸である。よって

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$$

となる。従って  $\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \frac{1}{3} (\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3)$  である。

(3)

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2r \sin C \cdot 2r \sin B \cdot \sin A && \left( \text{正弦定理によって, } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = 2r \text{ である} \right) \\
&= 2r^2 \sin A \sin B \sin C \\
&\leq 2r^2 \left( \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^3 && \left( \begin{array}{l} \sin A, \sin B, \sin C > 0 \text{ であるから,} \\ \text{相加相乗平均の不等式より} \\ \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \geq \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \text{ である} \end{array} \right) \\
&\leq 2r^2 \sin^3 \frac{A+B+C}{3} && ((2) \text{ の結果より}) \\
&= 2r^2 \sin^3 60^\circ && (A, B, C \text{ は三角形の内角であるから } A+B+C = 180^\circ \text{ である}) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2
\end{aligned}$$

従って  $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$  となるが, 上において  $A = B = C = 60^\circ$  のとき 2 つの不等式においてともに等号が成立する。つまり  $\triangle ABC$  が正三角形のとき  $S = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$  となる。従って  $S$  の最大値は  $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$  である。 //