

## Cauchy-Schwarz の不等式

2次元のベクトルの内積を考える。

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とし, 2つのベクトルのなす角を  $\theta$  とする。

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{v} \right| \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta$$

であるから

$$(ax + by)^2 = \left( \vec{a} \cdot \vec{v} \right)^2 = \left( \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta \right)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \cos^2 \theta \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

となり

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

が成り立つ。

これの拡張版である, 次の定理を証明しよう。その証明法は上の議論とは全く異なるが, 他のいろいろな場面に応用が効く重要な方法である。

### ( Cauchy-Schwarz の不等式 )

$a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n$  が実数のとき

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

が成り立つ。また, ここで等号が成立するのは  $sa_1 = ux_1, sa_2 = ux_2, \dots, sa_n = ux_n$  となる  $s, u$  が存在するときである。

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$  のときは公式は正しいので,  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  のときに考える。

$f(t) = (a_1t - x_1)^2 + (a_2t - x_2)^2 + \dots + (a_nt - x_n)^2$  とおく。  $f(t)$  は平方和であるから, 任意の実数に  $t$  に対してつねに  $f(t) \geq 0$  である。

一方  $f(t)$  を展開すると

$$f(t) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)t^2 - 2(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)t + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

となる。 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  であるから  $f(t)$  は  $t$  に関する 2 次式で 2 次の係数は正である。よって、つねに  $f(t) \geq 0$  となることより、判別式をとると

$$D/4 = (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \leq 0$$

である。従って

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \dots 1$$

となる。

1 において等号が成り立つのは  $f(t) = 0$  が重解をもつときであるが、つねに  $f(t) \geq 0$  となることが分かっているので、 $f(t) = 0$  が重解をもつことと、 $f(t) = 0$  が実数解をもつことは同値になる。よって等号が成り立つのは  $f(t_0) = 0$  となる実数  $t_0$  が存在するときである。 $f(t_0) = (a_1t_0 - x_1)^2 + (a_2t_0 - x_2)^2 + \dots + (a_nt_0 - x_n)^2 = 0$  を言い換えると

$$a_1t_0 = x_1, a_2t_0 = x_2, \dots, a_nt_0 = x_n$$

となる。■

例  $f(x), g(x)$  は  $-1 \leq x \leq 1$  において連続とする。このとき

$$\left\{ \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx \int_{-1}^1 \{g(x)\}^2 dx \dots 1$$

である。

$-1 \leq x \leq 1$  においてつねに  $f(x) = 0$  となるときは左辺 = 右辺 = 0 であるから確かに 1 は成立する。そこで以下では、 $-1 \leq x \leq 1$  において  $f(x)$  は 0 以外の値も取るものとする。

$t$  の関数  $F(t)$  を

$$F(t) = \int_{-1}^1 \{tf(x) - g(x)\}^2 dx \dots 2$$

で定義する。被積分関数は  $-1 \leq x \leq 1$  でつねに 0 以上の値をとるので、 $t$  の値によらずつねに  $F(t) \geq 0$  である。一方、2 の右辺を展開すると

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-1}^1 \{t^2 f(x)^2 - 2tf(x)g(x) + g(x)^2\} dx \\ &= t^2 \int_{-1}^1 f(x)^2 dx - 2t \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx + \int_{-1}^1 g(x)^2 dx \end{aligned}$$

となる。 $F(t)$  は2次関数であり, 2次の係数  $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx$  は正である。 $F(t)$  がつねに  $F(t) \geq 0$  を満たすことより, 判別式  $D/4$  は  $D/4 \leq 0$  でなければならない。よって

$$D/4 = \left\{ \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \right\}^2 - \int_{-1}^1 f(x)^2 dx \cdot \int_{-1}^1 g(x)^2 dx \leq 0$$
$$\therefore \left\{ \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \int_{-1}^1 f(x)^2 dx \cdot \int_{-1}^1 g(x)^2 dx$$

となり, 1 が示された。■