

余因子行列と \det の乗法性

2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\text{tr} A = a + d$ を A の trace, $\det A = ad - bc$ を A の determinant と言う。

また, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を A の余因子行列と言う。このとき次が成り立つ。

命題

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を 2×2 行列とする。また $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) $A + \tilde{A} = \tilde{A} + A = (\text{tr} A)E$
- (2) $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E$
- (3) (Cayley-Hamilton の定理) $A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)E = O$
- (4) $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$
- (5) (\det の乗法性) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

$$(1) \tilde{A} + A = A + \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = (\text{tr} A)E \text{ である。}$$

$$(2) A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (\det A)E \text{ である。同様に } \tilde{A}A = (\det A)E \text{ も分かる。}$$

(3) (1) より $A + \tilde{A} = (\text{tr} A)E$ である。この両辺に A を掛けると $A^2 + A\tilde{A} = (\text{tr} A)A$ となる。ここへ (2) を代入すると $A^2 + (\det A)E = (\text{tr} A)A$ となる。よって $A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)E = O$ となる。

$$(4) AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} \text{ であるから } \widetilde{AB} = \begin{pmatrix} cy+dw & -ay-bw \\ -cx-dz & ax+bz \end{pmatrix}$$

$$\text{である。一方 } \tilde{B}\tilde{A} = \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wd+yc & -wb-ya \\ -zd-xc & zb+xa \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

よって $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$ である。

(5) (2) より $(\widetilde{AB})(AB) = (\det AB)E$ であり, 一方 (4) を用いると $(\widetilde{AB})(AB) = \tilde{B}\tilde{A}AB = \tilde{B}(\det A)EB = (\det A)\tilde{B}B = (\det A)(\det B)E$ であるから, $(\det AB)E = (\det A)(\det B)E$ となる。よって $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ■

[注] (2) より $\det A \neq 0$ のとき $A \left(\frac{1}{\det A} \tilde{A} \right) = \left(\frac{1}{\det A} \tilde{A} \right) A = E$ となるので $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$ と分かる。