

## 余因子行列と $\det$ の乗法性

$2 \times 2$  行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して  $\text{tr} A = a + d$  を  $A$  の trace,  $\det A = ad - bc$  を  $A$  の determinant と言う。

また,  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  を  $A$  の余因子行列と言う。このとき次が成り立つ。

命題

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  を  $2 \times 2$  行列とする。また  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする。

- (1)  $A + \tilde{A} = \tilde{A} + A = (\text{tr} A)E$
- (2)  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E$
- (3) ( Cayley-Hamilton の定理 )  $A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)E = O$
- (4)  $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$
- (5) (  $\det$  の乗法性 )  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

$$(1) \tilde{A} + A = A + \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = (\text{tr} A)E \text{ である。}$$

$$(2) A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (\det A)E \text{ である。同様に } \tilde{A}A = (\det A)E \text{ も分かる。}$$

(3) (1) より  $A + \tilde{A} = (\text{tr} A)E$  である。この両辺に  $A$  を掛けると  $A^2 + A\tilde{A} = (\text{tr} A)A$  となる。ここへ (2) を代入すると  $A^2 + (\det A)E = (\text{tr} A)A$  となる。よって  $A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)E = O$  となる。

$$(4) AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} \text{ であるから } \widetilde{AB} = \begin{pmatrix} cy+dw & -ay-bw \\ -cx-dz & ax+bz \end{pmatrix}$$

$$\text{である。一方 } \tilde{B}\tilde{A} = \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wd+yc & -wb-ya \\ -zd-xc & zb+xa \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

よって  $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$  である。

(5) (2) より  $(\widetilde{AB})(AB) = (\det AB)E$  であり, 一方 (4) を用いると  $(\widetilde{AB})(AB) = \tilde{B}\tilde{A}AB = \tilde{B}(\det A)EB = (\det A)\tilde{B}B = (\det A)(\det B)E$  であるから,  $(\det AB)E = (\det A)(\det B)E$  となる。よって  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  ■

[ 注 ] (2) より  $\det A \neq 0$  のとき  $A \left( \frac{1}{\det A} \tilde{A} \right) = \left( \frac{1}{\det A} \tilde{A} \right) A = E$  となるので  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$  と分かる。