

n 次正行列 $X = (x_{ij})$ に対して, 行列 (x_{ji}) を X の転置行列と言い, tX と書く。

$$X = (x_{ij}) \text{ のとき, } {}^tX = (x_{ji})$$

つまり, X の行と列を入れ換えたものが tX である。

(転置行列の性質)

次が成り立つ。

(1) ${}^t({}^tX) = X$

(2) ${}^t(aX + bY) = a{}^tX + b{}^tY$ (a, b は数)

(1) ${}^t\{{}^t(x_{ij})\} = {}^t(x_{ji}) = (x_{ij})$

(2) ${}^t\{a(x_{ij}) + b(y_{ij})\} = {}^t(ax_{ij} + by_{ij}) = (ax_{ji} + by_{ji}) = a(x_{ji}) + b(y_{ji}) = a{}^tX + b{}^tY$ ■

n 次正行列 X が ${}^tX = X$ を満たすとき, X は対称行列であると言い, ${}^tX = -X$ となるとき交代行列 (歪対称行列) と言う。

(対称行列と交代行列の和)

A が n 次正方行列のとき

$$A = S + T \quad (S \text{ は対称行列, } T \text{ は交代行列) と書ける。$$

$$S = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \quad T = \frac{1}{2}(A - {}^tA) \text{ とおくと, } A = S + T \text{ である。また}$$

$${}^tS = \frac{1}{2}\{{}^tA + {}^t({}^tA)\} = \frac{1}{2}({}^tA + A) = S$$

$${}^tT = \frac{1}{2}\{{}^tA - {}^t({}^tA)\} = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA) = -T$$

であるから, S は対称行列, T は交代行列である。以上で示された。■