

# $n$ 次正方行列に関する Cayley–Hamilton の定理

- 1 置換
- 2  $n$  次正方行列の  $\det$
- 3 余因子行列
- 4 Cayley–Hamilton の定理
- 5  $\det$  の乗法性
- 6 逆行列
- 7 Cramer の公式

# 1 置換

$n$  個の文字  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  の置換全体の集合を  $S_n$  と表す。

異なる2つの文字の入れ換えを互換と言う。 $i$  と  $j$  を入れ換える互換を  $(ij)$  で表す。任意の置換は、互換の積で表される。

[例]  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  は

$(13) \rightarrow (24) \rightarrow (12)$  とすれば得られるので、 $\sigma = (12)(24)(13)$  と書く。

もちろん  $\sigma = (12)(12)(12)(24)(13)$  でもある。つまり、互換の積として表す方法は一意的ではない。

任意の置換を互換の積に表すとき、その互換の個数は一定ではないが、その偶奇は一意的に決まる。そのことを示すために、次を準備する。

(補題)

$\sigma \in S_n$  に対して  $f(\sigma) = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$  とおく。但し、右辺の積は、異なるすべての

2つの文字  $i, j$  の組み合わせに渡る積を表す。

このとき、 $\sigma, \tau \in S_n$  に対して  $f(\sigma\tau) = f(\sigma)f(\tau)$  が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(\sigma\tau) &= \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} \\ &= \prod_{i \neq j} \left\{ \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \times \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \right\} \\ &= \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \times \prod_{i \neq j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \\ &= \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \times f(\tau) \end{aligned}$$

ここで、 $i, j$  が異なるすべての2文字の組み合わせを動くとき、 $\tau(i), \tau(j)$  もまた異なるすべての2文字の組み合わせを動くので  $\prod_{i \neq j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = f(\sigma)$  となる。よって  $f(\sigma\tau) = f(\sigma)f(\tau)$  である。■

$\tau$  が互換  $\tau = (pq)$  のとき  $\tau(k) = \begin{cases} k & (k \neq p, q) \\ p & (k = q) \\ q & (k = p) \end{cases}$  であるから

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \prod_{i \neq p, q} \prod_{j \neq p, q} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \times \prod_{i \neq p, q} \frac{\tau(i) - \tau(p)}{i - p} \times \prod_{i \neq p, q} \frac{\tau(i) - \tau(q)}{i - q} \times \frac{\tau(p) - \tau(q)}{p - q} \\ &= \prod_{i \neq p, q} \prod_{j \neq p, q} \frac{i - j}{i - j} \times \prod_{i \neq p, q} \frac{i - q}{i - p} \cdot \frac{i - p}{i - q} \times \frac{q - p}{p - q} \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。従って、補題より  $\sigma$  が  $m$  個の互換の積で書けるとき  $f(\sigma) = (-1)^m$  となる。そうすると、 $\sigma$  が偶数個の互換の積にも、奇数個の互換の積にも書けるとすると  $1 = -1$  となって矛盾である。よって、 $\sigma$  を互換の積に書くとき、その個数の偶奇は  $\sigma$  によって一意に決まる。 $\sigma$  が偶数個の互換の積に書けるとき偶置換、奇数個の互換の積に書けるとき奇置換と呼ぶ。

(置換の符号)

$\sigma \in S_n$  に対して

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & (\sigma \text{ が偶置換}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇置換}) \end{cases}$$

と定める。

その定義から、 $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$  である。

## 2 $n$ 次正方行列の $\det$

( $\det$  の定義)

$n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定義する。

$n$  次正方行列  $A$  の行と列を入れ換えたものを  $A$  の転置行列と言って  $A'$  と表す。

$\det$  は転置をとっても変わらないことを示そう。

(転置行列と  $\det$ )

$$\det({}^t A) = \det A$$

$A = (a_{ij})$ ,  ${}^t A = (b_{ij})$  とすると

$$\begin{aligned} \det({}^t A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$  のとき  $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$  である。

$\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  が  $1, 2, \dots, n$  となるように並べかえると

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \cdots & \sigma^{-1}(n) \end{pmatrix} \text{となる。}$$

$\sigma^{-1}$  は、 $\sigma$  を作るための互換を逆に合成していけば作ることができるので、 $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$  である。そして  $\sigma$  が  $S_n$  内をすべて動くとき、 $\sigma^{-1}$  も  $S_n$  内をすべて動く。よって、 $\textcircled{1}$  において  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  が  $1, 2, \dots, n$  となるように並べかえると

$$\begin{aligned} \det({}^t A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \det A \end{aligned}$$

となり示された。■

行列  $A$  の第  $i$  行を  $\mathbf{a}_i$ , 第  $i$  列を  $\vec{a}_i$  と表す。

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

$\det$  の定義より多重線形性が分かる。

**( $\det$  の多重線形性)**

$$(1) \quad \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_j + \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n) \\ = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n)$$

$$(2) \quad \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, c\vec{a}_n, \dots, \vec{a}_n) = c \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \dots, \vec{a}_n)$$

$$(1) \quad \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_j + \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n) \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a_{j\sigma(j)} + b_{j\sigma(j)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots b_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n)$$

$$(2) \quad \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, c\vec{a}_n, \dots, \vec{a}_n) \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (ca_{j\sigma(j)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ = c \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad \blacksquare$$

更に、 $\det$  の交代性が分かる。

**( $\det$  の交代性)**

$\tau \in S_n$  とすると

$$\det(\vec{a}_{\tau(1)}, \vec{a}_{\tau(2)}, \dots, \vec{a}_{\tau(n)}) = \text{sgn}(\tau) \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

$$\det(\vec{a}_{\tau(1)}, \vec{a}_{\tau(2)}, \dots, \vec{a}_{\tau(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \cdots a_{n\sigma\tau(n)}$$

ここで、 $\sigma$  が  $S_n$  内をすべて動くとき、 $\rho = \sigma\tau$  も  $S_n$  内をすべて動き  $\text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$  となる。このとき、 $\text{sgn}(\tau)\text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma)$  であるから

$$\begin{aligned} & \det(\vec{a}_{\tau(1)}, \vec{a}_{\tau(2)}, \dots, \vec{a}_{\tau(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \cdots a_{n\sigma\tau(n)} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \text{sgn}(\rho) \text{sgn}(\tau) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \cdots a_{n\rho(n)} \\ &= \text{sgn}(\tau) \sum_{\rho \in S_n} \text{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \cdots a_{n\rho(n)} \\ &= \text{sgn}(\tau) \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

特に、互換の符号は  $-1$  であるから、2つの列を入れ換えると  $\det$  は  $-1$  倍される。

**【注】**  $\det({}^t A) = \det A$  であったから、転置してから列の多重線形性・交代性を用いた後、再び転置すれば、行に対しても多重線形性・交代性が成り立つことが分かる。

**【注】**  $\det$  の交代性から、行列  $A$  が同じ列（或は行）を含むとき  $\det A = 0$  であることが次のようにして分かる。

$A$  において、第  $i$  列  $\vec{a}_i$  と第  $j$  列  $\vec{a}_j$  が同じで  $\vec{b}$  であるとする。

$$\begin{aligned} \det A &= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{a}_n) \\ &= -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{a}_n) \quad \text{☞ 第 } i \text{ 列と第 } j \text{ 列を入れ換えたので } - \text{ がつく} \\ &= -\det A \end{aligned}$$

$\det$  の展開について調べるためにまず次を示す。

(補題)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

において、 $\sigma(1) = 1$  となるとき以外はすべて

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

である。そして、このような  $\sigma$  は  $2, 3, \dots, n$  なる  $n-1$  文字の置換と見ることができ、そのときの符号は  $\operatorname{sgn}(\sigma)$  と同じである。よって

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1)=1\}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} \sum_{\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1)=1\}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

多重線形性・交代性を利用して  $\det$  の展開を示そう。

( $\det$  の第  $j$  列に沿っての展開)

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 &+ (-1)^{2+j} a_{2j} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \\
 &\dots\dots \\
 &+ (-1)^{n+j} a_{nj} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

まず、多重線形性より

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & 0 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & 0 & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & 0 & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&+ \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & 0 & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & 0 & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \\
&\dots\dots \\
&+ \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & 0 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & 0 & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & 0 & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

次に、交代性を用いて行・列を入れ換えると

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{(1-1)+(j-1)} \det \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$+ (-1)^{(2-1)+(j-1)} \det \begin{pmatrix} a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

.....

$$+ (-1)^{(n-1)+(j-1)} \det \begin{pmatrix} a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \end{pmatrix}$$

最後に,  $(-1)^{(k-1)+(j-1)} = (-1)^{k+j-2} = (-1)^{k+j}$  であることと, 補題を用いると

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+j} a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+j} a_{2j} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

.....

$$+ (-1)^{n+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j+1} & \cdots & a_{n-1n} \end{pmatrix}$$

となり示された。■

[注] もちろん、行に沿った展開も同様である。

### 3 余因子行列

$$n \text{ 次正方行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ において, 第 } i \text{ 行, 第 } j$$

$$\text{列を除いて作った } n-1 \text{ 次正方行列 } A^{(i,j)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ の } \det \text{ を}$$

用いて  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{(i,j)})$  と定義し、これを  $A$  の第  $(i, j)$  余因子という。そうすると前に見たように

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

と、 $\det A$  を第  $j$  列に沿って展開することができた。同様に、第  $i$  行に沿って展開することもできる。

[例]  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき

$$A_{11} = (-1)^{1+1}d = d, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}c = -c, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}b = -b, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}a = a$$

である。そして

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = ad - bc \quad \det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = da - cb$$

さて、 $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \det A$  であるが、 $j \neq k$  のとき

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \cdots + a_{nk}A_{nj} = 0$$

となることが次のようにして分かる。

$j \neq k$  とし、 $A = (a_{ij})$  の第  $j$  列を第  $k$  列で置き換えたものを  $B = (b_{ij})$  とする。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$b_{i\ell} = a_{i\ell} \quad (\ell \neq j), \quad b_{ij} = a_{ik}$$

$B$  の第  $k$  列と第  $j$  列は一致するので  $\det B = 0$  である。また、 $B$  から第  $j$  列を取り除いたものは、 $A$  から第  $j$  列を取り除いたものと一致するので  $B_{ij} = A_{ij}$  である。よって、 $\det B$  を第  $j$  列に沿って展開すると

$$0 = b_{1j}B_{1j} + b_{2j}B_{2j} + \cdots + b_{nj}B_{nj} = a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \cdots + a_{nk}A_{nj}$$

となる。

$\tilde{A} = (A_{ij})$  を  $A$  の余因子行列と呼ぶ。

このとき、次が成り立つ。

(定理)

$\tilde{A}$  を  $A$  の余因子行列とすると、 $\tilde{A}A = (\det A)E$  である。

実際,  $\tilde{A} = (c_{ij})$  とすると  $c_{ij} = A_{ji}$  で,  $\tilde{A}A$  の  $(i, j)$  成分  $d_{ij}$  は

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{k=1}^n c_{ik}a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{ki}a_{kj} \\ &= a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} \\ &= \begin{cases} \det A & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \blacksquare \end{aligned}$$

## 4 Cayley–Hamilton の定理

$n$  次正方行列  $A$  に対して,  $\varphi_A(x) = \det(xE - A)$  を  $A$  の固有多項式という。

### (Cayley–Hamilton の定理)

$A$  を  $n$  次正方行列とする。  $\varphi_A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$  を  $A$  の固有多項式とすると  $\varphi_A(A) = O$  である。

$\det(xE - A) = \varphi_A(x)$  である。そこで  $xE - A$  の余因子行列を  $B(x)$  とすると  $B(x)(xE - A) = \det(xE - A)E$  であるから

$$B(x)(xE - A) = \varphi_A(x)E$$

である。 $n$  次正方行列  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  を用いて

$$B(x) = x^{n-1}E + B_1x^{n-2} + B_2x^{n-3} + \cdots + B_{n-2}x + B_{n-1}$$

とおく。これを代入すると

$$\begin{aligned} &(x^{n-1}E + B_1x^{n-2} + B_2x^{n-3} + \cdots + B_{n-2}x + B_{n-1})(xE - A) = \varphi_A(x)E \\ \iff &x^nE + (B_1 - A)x^{n-1} + (B_2 - B_1A)x^{n-2} + \cdots + (B_{n-1} - B_{n-2}A)x - B_{n-1}A \\ &= (x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)E \\ \iff & \end{aligned}$$

$$(B_1 - A - a_1E)x^{n-1} + (B_2 - B_1A - a_2E)x^{n-2} + \dots \\ \dots + (B_{n-1} - B_{n-2}A - a_{n-1}E)x - (B_{n-1}A + a_nE) = O$$

ここで、もし左辺の  $x^j$  の係数行列が  $O$  でないなら、左辺を計算したときどこかの成分に  $x^j$  を含む多項式が必ず現れることになり計算結果が  $O$  であることに反する。よって、左辺の係数行列はすべて  $O$  である。よって

$$B_1 - A = a_1E, \quad B_2 - B_1A = a_2E, \quad \dots \quad B_{n-1} - B_{n-2}A = a_{n-1}E, \quad -B_{n-1}A = a_nE$$

この各々の辺々に  $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, E$  を掛けて加えると

$$(B_1A^{n-1} - A^n) + (B_2A^{n-2} - B_1A^{n-1}) + \dots + (B_{n-1}A - B_{n-2}A^2) - B_{n-1}A \\ = a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_{n-1}A + a_nE$$

となるから、次々相殺して

$$-A^n = a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_{n-1}A + a_nE$$

つまり

$$A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_{n-1}A + a_nE = O$$

となる。これは、 $\varphi_A(A) = O$  を意味している。■

## 5 det の乗法性

det の多重線形性と交代性を用いて、det の乗法性を示そう。

(det の乗法性)

$$\det(AB) = \det A \det B$$

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \text{ とし, } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

$$AB = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \left( \sum_{i_1=1}^n b_{i_1 1} \vec{a}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n b_{i_2 2} \vec{a}_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n b_{i_n n} \vec{a}_{i_n} \right) \text{ である}$$

から、多重線形性より

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det\left(\sum_{i_1=1}^n b_{i_1 1} \vec{a}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n b_{i_2 2} \vec{a}_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n b_{i_n n} \vec{a}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \det(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_n})\end{aligned}$$

ここで、 $i_1, i_2, \dots, i_n$  は、それぞれ独立に  $1, 2, \dots, n$  を動くが、これらの中にもし同じものがあれば  $\det(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_n}) = 0$  となるから、 $i_1, i_2, \dots, i_n$  が互いに異なるとき、つまり  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  が  $(1, 2, \dots, n)$  の並べかえになっているようなあらゆる場合に和をとればよい。つまり  $1, 2, \dots, n$  のすべての置換に渡って和をとればよい。

$\det$  の交代性より

$$\det(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_n}) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \det(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_n}) \\ &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n \text{ は} \\ 1, 2, \dots, n \text{ の} \\ \text{並べかえ}}} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \operatorname{sgn}(\sigma) \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)\end{aligned}$$

ここで、 $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  が  $1, 2, \dots, n$  となるように並べかえると

$$\sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} b_{1\sigma^{-1}(1)} b_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots b_{n\sigma^{-1}(n)}$$

である。そして  $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$  に注意すると

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \operatorname{sgn}(\sigma) \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) b_{1\sigma^{-1}(1)} b_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots b_{n\sigma^{-1}(n)} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \det B \det A \\ &= \det A \det B \quad \square \det \text{ は数なので可換} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

## 6 逆行列

$\det$  の乗法性と余因子行列を利用して、逆行列の存在条件を求めよう。

$AB = BA = E$  となるとき、 $B$  を  $A$  の逆行列と言う。逆行列は存在するなら一意的である。実際、 $B, C$  を  $A$  の逆行列とすると

$$BAC = (BA)C = EC = C, \quad BAC = B(AC) = BE = B$$

であるから、 $C = BAC = B$  となる。そこで  $A$  の逆行列を  $A^{-1}$  で表す。

### (逆行列の存在条件)

次の2条件は同値である。

- (1)  $A^{-1}$  が存在する。
- (2)  $\det A \neq 0$  である。

(1)  $\implies$  (2)

$A^{-1}A = E$  であるから、 $\det$  の乗法性から

$$\det(A^{-1})\det A = \det(A^{-1}A) = \det E = 1$$

となるので  $\det A \neq 0$  である。

(2)  $\implies$  (1)

$\tilde{A}$  を  $A$  の余因子行列とすると  $\tilde{A}A = (\det A)E$  である。 $\det A \neq 0$  であるから  $B = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$  とおくと  $BA = E \dots \textcircled{1}$  となる。

また、 $\det({}'A) = \det A \neq 0$  であるから  $\det({}'A) \neq 0$  である。 ${}'\tilde{A}{}'A = \det({}'A)E$  であるから、 $C = \frac{1}{\det({}'A)}({}'\tilde{A})$  とおくと  $C{}'A = E$  である。よって  ${}'(C{}'A) = {}'E$  となるが、 ${}'(C{}'A) = A{}'C$ 、 ${}'E = E$  であるから  $D = {}'C$  とおけば  $AD = E \dots \textcircled{2}$  となる。① ② より

$$BAD = (BA)D = ED = D, \quad BAD = B(AD) = BE = B$$

よって  $D = B$  で  $BA = AB = E$  であるから  $A^{-1}$  が存在して  $A^{-1} = B = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$  である。■

**[注]** 行と列の入れ替えを2回行なうと元に戻るから、 ${}'({}'A) = A$  である。

また、 $A = (a_{ij})$ 、 $B = (b_{ij})$  のとき、 ${}'(AB)$  の  $(i, j)$  成分 =  $(AB)$  の  $(j, i)$  成分 =  $\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$

である。一方

$$\begin{aligned}
 & (^tB^tA \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (^tB \text{ の } (i, k) \text{ 成分}) \cdot (^tA \text{ の } (k, j) \text{ 成分}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (B \text{ の } (k, i) \text{ 成分}) \cdot (A \text{ の } (j, k) \text{ 成分}) \\
 &= \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}
 \end{aligned}$$

であるから  $(^t(AB) \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = (^tB^tA \text{ の } (i, j) \text{ 成分})$  となるので  $^t(AB) = ^tB^tA$  である。

## 7 Cramer の公式

$A$  の第  $(i, j)$  余因子を  $A_{ij}$  とするとき、 $A$  の余因子行列は  $\tilde{A} = (A_{ij})$  であった。

$A^{-1}$  が存在するとき、 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$  であることが分かったので、これを用いて Cramer の公式を示そう。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とするとき、 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  に関する連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

において、 $A^{-1}$  が存在するとき、この解は  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} \vec{b}$  で与えられるから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

ここで、 $x_j = \frac{A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n}{\det A}$  の分子は  $A$  の第  $j$  列を  $\vec{b}$  で置き換えた行列の  $\det$  の  $\vec{b}$  に沿った展開に他ならない。よって、次を得た。

## (Cramer の公式)

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  に関する連立 1 次方程式 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
 の解は

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$