

固有値と固有 vector

以下では、行列は 2×2 行列とする。

1 定義

行列 A に対し

$$A\vec{x} = k\vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

となるとき k を A の固有値, \vec{x} を k に対する (ひとつの) 固有 vector という。

2 固有値・固有 vector の求め方

まず準備として次を示す。

命題

行列 X に対して次の 2 条件は同値である。

(1) $\det X = 0$

(2) $X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ がある。

(2) \implies (1)

もし $\det X \neq 0$ とすると $X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両辺に X^{-1} を掛けると

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得て仮定に反する。よって $\det X = 0$ である。

(1) \implies (2)

$X = O$ のときは例えば $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすればよい。そこで以下 $X \neq O$ とし, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

とおく。 $\det X = 0$ より $ad - bc = 0$ である。従って

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。ここで $X \neq O$ より $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ のうち少なくとも一方は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ではないので示された。■

さて、固有値の求め方を考えよう。 k が固有値となるための条件を言い換える。

$$\begin{array}{l} A\vec{x} = k\vec{x} \text{ かつ } \vec{x} \neq \vec{0} \\ \text{となる } \vec{x} \text{ がある} \end{array} \iff \begin{array}{l} (kE - A)\vec{x} = \vec{0} \text{ かつ } \vec{x} \neq \vec{0} \\ \text{となる } \vec{x} \text{ がある} \end{array}$$

ここで上の命題を用いると

$$\begin{array}{l} (kE - A)\vec{x} = \vec{0} \text{ かつ } \vec{x} \neq \vec{0} \\ \text{となる } \vec{x} \text{ がある} \end{array} \iff \det(kE - A) = 0$$

$$\text{よって } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおくと } \det \begin{pmatrix} k-a & -b \\ -c & k-d \end{pmatrix} = 0 \text{ より}$$

$(k-a)(k-d) - bc = 0$ つまり $k^2 - (a+d)k + ad - bc = 0$ となる。そこで $\varphi_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ とおいて、これを A の固有多項式とすることにする。さらに2次方程式 $\varphi_A(x) = 0$ を固有方程式と呼ぶ。以上で

固有値は、固有方程式の解としてすべて得られる

ということが分かった。固有値が分かれば、固有 vector は成分を用いて具体的に計算することで得られる。

$$[\text{例}] A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

A の固有多項式は $\varphi_A(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ であるから、固有値は1と2である。

(1) 固有値1に対する固有 vector

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ より } \begin{cases} x+y = x \\ 2y = y \end{cases} \text{ である。よって } y = 0 \text{ で } x \text{ は任意。従って1}$$

に対する固有 vector は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} (t \neq 0)$

(2) 固有値2に対する固有 vector

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ より } \begin{cases} x+y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases} \text{ である。よって } y = x \text{ となる。従って2に対}$$

する固有 vector は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ ($t \neq 0$)

3 独立な固有 vector と対角化

A が固有値 k_1, k_2 をもち, k_1, k_2 に対する固有 vector \vec{x}_1, \vec{x}_2 が 1 次独立であるときに考える。

$A\vec{x}_1 = k_1\vec{x}_1, A\vec{x}_2 = k_2\vec{x}_2$ であるから

$$\begin{aligned} A(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= (k_1\vec{x}_1, k_2\vec{x}_2) \\ &= (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。但し, (\vec{a}, \vec{b}) は縦 vector \vec{a} と縦 vector \vec{b} を並べてできる 2×2 行列を表わす。そこで $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ とおくと, \vec{x}_1, \vec{x}_2 が 1 次独立であることより P は逆行列をもつ。そして $AP = P \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ であるから $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ となり, A は対角化可能である。

さて, いつ独立な固有 vector をもつかということが問題であるが, これに関して次が成り立つ。

命題

k_1, k_2 を A の固有値とし, \vec{x}_1, \vec{x}_2 をそれぞれ k_1, k_2 に対する固有 vector とする。このとき $k_1 \neq k_2$ ならば \vec{x}_1, \vec{x}_2 は 1 次独立である。

$A\vec{x}_1 = k_1\vec{x}_1, A\vec{x}_2 = k_2\vec{x}_2 \cdots 1$ である。 \vec{x}_1, \vec{x}_2 が 1 次独立であることを示すには

$$s\vec{x}_1 + t\vec{x}_2 = \vec{0} \implies s = t = 0$$

となることを言えばよい。

$s\vec{x}_1 + t\vec{x}_2 = \vec{0}$ に A を施すと $sA\vec{x}_1 + tA\vec{x}_2 = \vec{0}$ である。ここへ 1 を代入すると $sk_1\vec{x}_1 + tk_2\vec{x}_2 = \vec{0}$ となる。しかし $t\vec{x}_2 = -s\vec{x}_1$ であるから $sk_1\vec{x}_1 - sk_2\vec{x}_1 = \vec{0}$ つまり $s(k_1 - k_2)\vec{x}_1 = \vec{0}$ となる。ここで固有 vector の定義より $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ であるから $s(k_1 - k_2) = 0$ となる。さらに仮定より $k_1 \neq k_2$ であるから $s = 0$ となる。そうすると $t\vec{x}_2 = \vec{0}$ でもあるが, やはり固有 vector の定義より $\vec{x}_2 \neq \vec{0}$ であるから $t = 0$ となる。以上で $s = t = 0$ となり示された。■

分かったことをまとめると次のようになる。

A が相異なる固有値 k_1, k_2 をもつとき, k_1, k_2 に対する固有 vector \vec{x}_1, \vec{x}_2 を並べて作った行列を $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ となる。

4 A^n の計算

A が相異なる固有値 k_1, k_2 をもつときに A^n の計算方法を考える。

§3 の結果より, k_1, k_2 に対する固有 vector \vec{x}_1, \vec{x}_2 を並べて作った行列を $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ となる。

従って $(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{pmatrix}$ となる。一方

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^n &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

であるから $P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{pmatrix}$ となる。よって $A^n = P \begin{pmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ と分かる。

[注] $A\vec{x}_1 = k_1\vec{x}_1, A\vec{x}_2 = k_2\vec{x}_2$ を繰り返し用いると

$$A^n\vec{x}_1 = k_1^n\vec{x}_1, A^n\vec{x}_2 = k_2^n\vec{x}_2$$

となるので $A^n(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (k_1^n\vec{x}_1, k_2^n\vec{x}_2)$ である。この両辺に (\vec{x}_1, \vec{x}_2) の逆行列を掛けることで A^n を求めるのも良い方法である。

また, A^n を求める必要はなく $A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を計算するのが目的である場合は A^n を求めず

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ というように $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を固有 vector の 1 次結合に表わし, これより

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \alpha A^n\vec{x}_1 + \beta A^n\vec{x}_2 \\ &= \alpha k_1^n\vec{x}_1 + \beta k_2^n\vec{x}_2 \end{aligned}$$

として求めるとよい。