

命題

A, X を 2×2 行列とする。 $A \neq kE$ のとき

$AX = XA \cdots 1$ ならば $X = \alpha A + \beta E \cdots 2$ となる数 α, β が必ず存在する。

また, $A = kE$ のときは, これは成立しない。

(1) $A = kE$ のとき

このときは任意の 2×2 行列 X に対してつねに $AX = XA$ である。

そこで, 例えば $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば $AX = XA$ であるが, どのような α, β をとっても

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。つまり $AX = XA$ ではあっても $X = \alpha A + \beta E$ とは書けない X もある。

(2) $A \neq kE$ のとき

Case 1. $\varphi_A(x) = 0$ が相異なる 2 解 k_1, k_2 をもつとき

対角化して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ とする。 1 より $P^{-1}APP^{-1}XP = P^{-1}XPP^{-1}AP$ となるので

$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} P^{-1}XP = P^{-1}XP \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ である。 $P^{-1}XP = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1x & k_1y \\ k_2z & k_2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1x & k_2y \\ k_1z & k_2w \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1y = k_2y \\ k_2z = k_1z \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} (k_1 - k_2)y = 0 \\ (k_2 - k_1)z = 0 \end{cases}$$

ここで $k_1 - k_2 \neq 0$ であるから $y = z = 0$ となる。

従って $P^{-1}XP = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ となる。

そして $\alpha = \frac{x-w}{k_1-k_2}$, $\beta = \frac{k_1w-k_2x}{k_1-k_2}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$P^{-1}XP = \alpha P^{-1}AP + \beta E$$

となる。この両辺に左から P , 右から P^{-1} をかけると

$$X = \alpha A + \beta E$$

となる。

Case 2. $\varphi_A(x) = 0$ が重解 k をもつとき

\vec{a} を固有値 k に対する固有ベクトルとすると

$$A\vec{a} = k\vec{a} \cdots 3$$

である。また, \vec{b} を \vec{a} と独立なベクトルとすると

$$A\vec{b} = m\vec{a} + \ell\vec{b} \cdots 4$$

と書ける。 3, 4 より

$$\begin{aligned} A(\vec{a}, \vec{b}) &= (k\vec{a}, m\vec{a} + \ell\vec{b}) \\ &= (\vec{a}, \vec{b}) \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから $P = (\vec{a}, \vec{b})$ とおくと

$$AP = P \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \text{つまり } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \cdots 6$$

となる。 $\varphi_{P^{-1}AP}(x) = x^2 - (k + \ell)x + k\ell = (x - k)(x - \ell)$ であるから $P^{-1}AP$ の固有値は k, ℓ である。一方 A の固有値は k, k である。よって $P^{-1}AP$ の固有値と A の固有値が一致することを考えると $k = \ell$ でなければならない。よって 6 は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdots 7$$

となる。また, 7 において $m = 0$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ より $A = P \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} P^{-1}$ つまり $A = kE$ となって (2) の仮定に反する。よって $m \neq 0$ である。

$P^{-1}XP = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと, Case 1 のときと同様に

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} kx & mx + ky \\ kz & mz + kw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + mz & ky + mw \\ kz & kw \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} kx = kx + mz \\ mx + ky = ky + mw \\ kz = kz \\ mz + kw = kw \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} mz = 0 \\ m(x - w) = 0 \end{cases}$$

となる。ここで $m \neq 0$ であるから $z = 0$ かつ $x = w$ である。

従って $P^{-1}XP = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & k \end{pmatrix}$ となる。そして $\alpha = \frac{y}{m}$, $\beta = \frac{mx - ky}{m}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & k \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$P^{-1}XP = \alpha P^{-1}AP + \beta E$$

となる。この両辺に左から P , 右から P^{-1} をかけると

$$X = \alpha A + \beta E$$

となる。■