

2×2 行列 A の逆行列とは $AX = XA = E$ となる X のことであるが、実は、 $AX = E$ であれば、自動的に $XA = E$ が成り立つことを示そう。

定理

2 次正方行列 A, X に対して次が成り立つ。

$$AX = E \implies XA = E$$

但し、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列。

A の第 1 行を \vec{a}_1 、第 2 行を \vec{a}_2 とおくと $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix}$ で

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix} X = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから $\vec{a}_1 X = (1 \ 0)$ 、 $\vec{a}_2 X = (0 \ 1)$ である。ここで $x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 = (0 \ 0)$ とすると、

$$x\vec{a}_1 X + y\vec{a}_2 X = (0 \ 0)$$

$$\iff x(1 \ 0) + y(0 \ 1) = (0 \ 0)$$

$$\iff (x \ y) = (0 \ 0)$$

となり $x = y = 0$ となる。よって \vec{a}_1 と \vec{a}_2 は 1 次独立である。

そうすると $(1 \ 0) = a\vec{a}_1 + b\vec{a}_2$ 、 $(0 \ 1) = c\vec{a}_1 + d\vec{a}_2$ となる a, b, c, d がある。よって $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix}$ となる。 $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおけば $YA = E$ である。ここで

$$Y = Y(AX) = (YA)X = X$$

となり $X = Y$ である。よって $XA = E$ が成り立つ。■