

$x \rightarrow \infty$  とするときの漸近線の傾き  $a$  は  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  で得られる。

一方，図形的に考えると，漸近線の傾きは接線の傾きの極限で得られそうな気がする。このことに関して次を示そう。

(導関数の極限と漸近線の傾き)

$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  がともに存在するなら  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  である。

平均値の定理より

$$\frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = f'(c_x) \quad (x < c_x < 2x)$$

と書け， $x \rightarrow \infty$  のとき  $c_x \rightarrow \infty$  である。よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} f'(c_x) \quad \leftarrow \text{極限の存在が仮定されている} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(2x)}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 \frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \leftarrow \text{極限の存在が仮定されている} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$x \rightarrow -\infty$  のときも同様。