

(Taylor の定理)

$a \leq x \leq b$ で $f^{(n-1)}(x)$ は連続で, $a < x < b$ で $f^{(n)}(x)$ が存在すると仮定する。
このとき $a < c < b$ なる c をうまく選べば

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

と書ける。

定数 K を

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{K}{n!}(b-a)^n$$

によって定義する。また,

$$F(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{K}{n!}(b-x)^n$$

とおく。 $K = f^{(n)}(c)$ ($a < c < b$) となる c が存在することを言えば証明は終る。このような c の存在を示すために Rolle の定理を使う。そこで, まず $F(x)$ が Rolle の定理の仮定を満たすことを示す。

Step 1. $F(a) = F(b)$ であること

$F(b) = f(b)$ である。一方,

$$F(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{K}{n!}(b-a)^n$$

であるが, K の定義によってこの右辺は $f(b)$ に等しい。よって $F(a) = f(b)$ である。従って $F(a) = F(b)$ となる。

Step 2. $F'(x)$ の計算

積の微分公式を用いて, 各項を順々に微分すると

$$F'(x) = f'(x) \\ + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) - \frac{f'(x)}{1!}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b-x)^2 - 2 \cdot \frac{f''(x)}{2!}(b-x) \\
& \dots\dots\dots \\
& + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - (n-1) \cdot \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-2} \\
& \qquad \qquad \qquad - n \cdot \frac{K}{n!}(b-x)^{n-1} \\
& = f'(x) \\
& + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) - f'(x) \\
& + \frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f''(x)}{1!}(b-x) \\
& \dots\dots\dots \\
& + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2} \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{K}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}
\end{aligned}$$

となり，左上と右下の項が順々に相殺していく。そして残った項だけ取り出すと

$$F'(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{K}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}$$

となる。

Final Step. $K = f^{(n)}(c)$ ($a < c < b$) となる c の存在

$F(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で， $a < x < b$ で微分可能である。そして Step 1 より $F(a) = F(b)$ である。よって Rolle の定理によって， $F'(c) = 0$ ($a < c < b$) となる c が存在する。Step 2 で求めた $F'(x)$ に $x = c$ を代入すると

$$0 = F'(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} - \frac{K}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}$$

よって

$$\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} = \frac{K}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}$$

であるが， $b-c \neq 0$ であるから $K = f^{(n)}(c)$ を得る。

以上で定理は証明された。■