

## 線積分と Green の定理

$f(x, y)$  を平面内の領域  $D$  上の連続関数とする。また  $C$  を  $D$  に含まれる連続曲線

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b)$$

とする。区間  $[a, b]$  を分割して

$$\Delta : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

とし、各小区間  $[a_{i-1}, a_i]$  から任意に  $t_i$  をとって次の和を考える

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i))(x(a_i) - x(a_{i-1}))$$

分割  $\Delta$  を細かくしたとき、 $t_i$  をどのようにとっても和  $(*)$  が一定の極限值に収束するとき、その極限値を、微分式  $f(x, y)dx$  の積分路  $C$  に沿った線積分といって

$$\int_C f(x, y)dx$$

と表す。 $\int_C f(x, y)dy$  も同様に定義される。また、両者の和として  $\int_C f(x, y)dx + \int_C f(x, y)dy$  も定義される。

$C$  が閉曲線のときは  $C$  を一周して積分するということになるので

$$\oint_C f(x, y)dx, \quad \oint_C f(x, y)dy$$

と書くこともある。

(例) 積分路が  $C : y = \varphi(x)$  ( $\alpha \leq x \leq \beta$ ) なら、 $C$  に沿う線積分は、普通の定積分に等しい。

$$\int_C f(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \varphi(x))dx$$

同様に、 $C : x = \psi(y)$  ( $\gamma \leq y \leq \delta$ ) なら

$$\int_C f(x, y)dy = \int_{\gamma}^{\delta} f(\psi(y), y)dy$$

特に，普通の定積分  $\int_a^b f(x)dx$  は  $x$  軸上の閉区間  $[a, b]$  に沿う線積分である。

(例) 長方形  $R = \{(x, y) \mid \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta\}$  の周を正の向きに<sup>注1</sup> 1周する閉曲線を  $C$  とする。

$$\oint_C ydx = \int_a^\beta \gamma dx + \int_\beta^\alpha \delta dx = \int_a^\beta (\gamma - \delta)dx = -(\beta - \alpha)(\delta - \gamma) = -S$$

$$\oint_C xdy = \int_\gamma^\delta \beta dx + \int_\delta^\gamma \alpha dx = \int_\gamma^\delta (\beta - \alpha)dx = (\delta - \gamma)(\beta - \alpha) = S$$

よって

$$\oint_C (xdy - ydx) = 2S \quad \text{つまり} \quad S = \frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx)$$

線積分の存在に関して次が成り立つ。

(線積分の存在)

$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b)$  において，区間を分割すれば， $x(t)$ ,  $y(t)$  が  $C^1$  級であるとき，つまり，区分的に滑らかなら，線積分は存在して

$$\int_C f(x, y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

である。

区間を分割して考えれば  $(a, b)$  において  $x(t)$  が  $t$  の  $C^1$  級関数のときに示せばよい。平均値の定理より，小区間  $(a_{i-1}, a_i)$  内に  $\tau_i$  をとって

$$x(a_i) - x(a_{i-1}) = (a_i - a_{i-1}) \frac{dx}{dt}(\tau_i) \cdots 1$$

とできる。

<sup>注1</sup>  $R$  の内部を左手に見ながら進む方向

$\varepsilon > 0$  を任意にとる。定積分  $\int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt$  が存在することより, 分割を十分細かくとれば

$$\left| \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt - \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \frac{dx}{dt}(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

となる。閉区間  $[a, b]$  において  $\frac{dx}{dt}$  は連続であるから,  $\left| \frac{dx}{dt} \right| \leq M$  (有界) である。また,  $f(x(t), y(t))$  は  $t$  に関して連続であるから,  $[a, b]$  で一様連続である。従って十分細かい分割をとれば

$$|f(x(t_i), y(t_i)) - f(x(\tau_i), y(\tau_i))| < \varepsilon \cdots 2$$

とできる。そうすると

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i))(x(a_i) - x(a_{i-1})) - \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \frac{dx}{dt}(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i))(a_i - a_{i-1}) \frac{dx}{dt}(\tau_i) - \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \frac{dx}{dt}(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) \right| \\ & \hspace{20em} \leftarrow 1 \text{ を代入} \\ &= \left| \sum_{i=1}^n (f(x(t_i), y(t_i)) - f(x(\tau_i), y(\tau_i))) \frac{dx}{dt}(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(x(t_i), y(t_i)) - f(x(\tau_i), y(\tau_i))| \left| \frac{dx}{dt}(\tau_i) \right| (a_i - a_{i-1}) \\ &\leq \varepsilon M \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \quad \leftarrow 2 \text{ より} \\ &= \varepsilon M(b - a) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i))(x(a_i) - x(a_{i-1})) - \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt \right| \\ &= \left| \left( \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i))(x(a_i) - x(a_{i-1})) - \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \frac{dx}{dt}(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) \right) \right. \\ & \quad \left. + \left( \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \frac{dx}{dt}(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) - \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i))(x(a_i) - x(a_{i-1})) - \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \frac{dx}{dt}(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \frac{dx}{dt}(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) - \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt \right| \\
&= \varepsilon M(b-a) + \varepsilon \\
&= (1 + M(b-a))\varepsilon
\end{aligned}$$

ここで,  $1 + M(b-a)$  は  $\varepsilon$  と無関係な定数である。よって分割を細かくしていけば

$$\sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i))(x(a_i) - x(a_{i-1})) \rightarrow \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

となる。■

2重積分と線積分に関して次が成り立つ。

### (Green の定理 1)

$f(x, y)$  が縦線形領域  $D = \{(x, y) \mid \psi(x) < y < \varphi(x), \quad a < b\}$  の閉包  $\bar{D}$  で連続で,  $y$  に関して偏微分可能で,  $f_y(x, y)$  も連続とする。このとき,  $D$  の周を  $D$  に関して正の向きに 1 周する曲線を  $C$  とすると

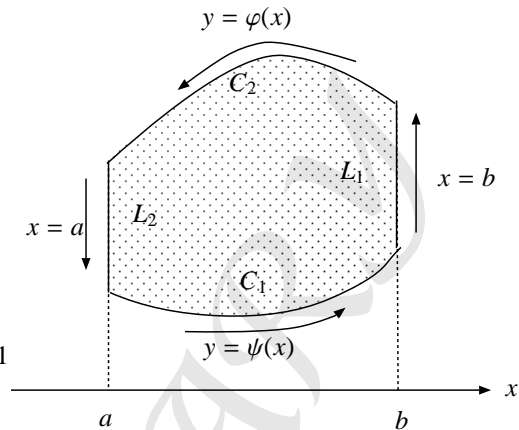
$$\iint_D f_y(x, y) dx dy = - \oint_C f(x, y) dx$$

同様に,  $D$  が  $y$  について縦線形領域で,  $f_x(x, y)$  が存在して連続ならば

$$\iint_D f_x(x, y) dx dy = \oint_C f(x, y) dy$$

仮定から，この2重積分は累次積分になり

$$\begin{aligned} & \iint_D f_y(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \left[ \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f_y(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b f(x, \psi(x)) dx \cdots 1 \end{aligned}$$



一方 C は，

$$C_1 : y = \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

$$C_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = \varphi(-t) \end{cases} \quad (-b \leq t \leq -a) \quad \text{このとき } x \text{ は } b \text{ から } a \text{ へ動く}$$

$$L_1 : \text{線分 } x = b, \psi(b) \leq y \leq \varphi(b)$$

$$L_2 : \text{線分 } x = a, \psi(a) \leq y \leq \varphi(a)$$

をあわせたものである。ここで  $L_1, L_2$  に沿う線積分は 0 であり，また  $C_1, C_2$  に沿う線積分は

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(x, y) dx &= \int_a^b f(x, \psi(x)) dx \\ \int_{C_2} f(x, y) dx &= - \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx \end{aligned}$$

であるから

$$\oint_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x, \psi(x)) dx - \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx \cdots 2$$

となる。よって 1 と 2 より

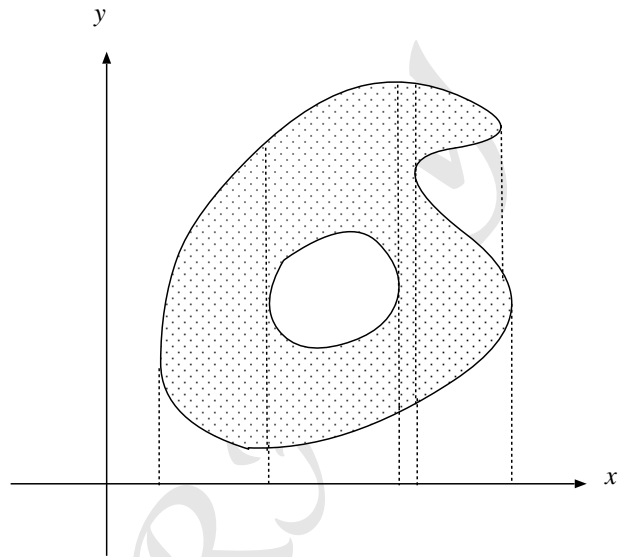
$$\iint_D f_y(x, y) dx = - \oint_C f(x, y) dx$$

となる。

$y$  に関する縦線形領域の場合は，左側では上から下に，右側では下から上に積分するので符号が + になる。■

## ( Green の定理 2 )

有界な領域  $D$  の境界が区分的に滑らかな有限個の単一閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_m$  からなるとする。このすべてに  $D$  に関する正の向きをつけたものを  $C$  とする。 $D$  を有限個の水平および垂直な線分で区切って、有限個の  $x$  についても、 $y$  についても縦線形な領域  $D_1, D_2, \dots, D_n$  に分割できると仮定する。



$P(x, y), Q(x, y)$  が  $\bar{D}$  において  $C^1$  級なら

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

$D$  を区切って  $D_1, D_2, \dots, D_n$  のそれぞれに対して Green の定理 1 を使うと

$$\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{C_i} P(x, y) dx, \quad \iint_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{C_i} Q(x, y) dy$$

であるから

$$\iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_i} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

よって

$$\sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

となるが、区切りに入れた線分上は反対向きに 2 回ずつ積分されるので打ち消しあい  $D$  の境界上の部分だけが残るので

$$\sum_{i=1}^n \oint_{C_i} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \oint_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

従って

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

となり示された。■

(系 1)

上の定理と同じ仮定の下,  $D$  の面積を  $|D|$  とすると

$$|D| = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

$P(x, y) = -y$ ,  $Q(x, y) = x$  とおくと

$$\oint_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \oint_C (x dy - y dx) \cdots 1$$

また

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

であるから

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2|D| \cdots 2$$

よって 1 と 2 より

$$|D| = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

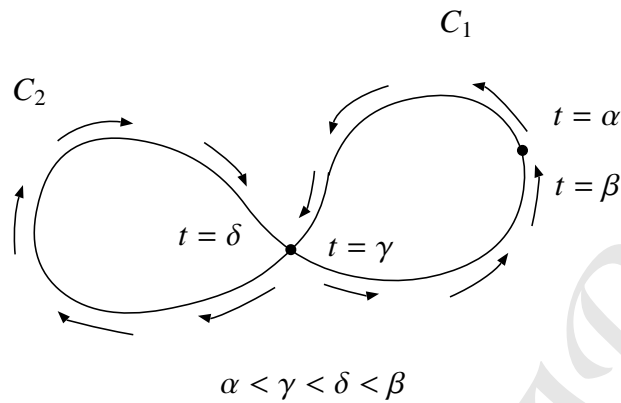
となり示された。■

(系 2)

有界な領域  $D$  の境界が単一閉曲線  $C$  からなるとする。  $D$  を有限個の水平・垂直な線分で区切って,  $x$  についても,  $y$  についても有限個の縦線形領域に分割できるとする。

$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$  と表されていれば

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| dt$$



例えば  $\alpha \leq t \leq \gamma$  のときは  $C$  上を正の向きにまわり,  $\gamma \leq t \leq \delta$  のときは  $C$  上を負の向きに,  $\delta \leq t \leq \beta$  のときは  $C$  上を正の向きにまわり,  $C$  が2つの単一閉曲線  $C_1$  と  $C_2$  に分割されているとする。そうすると, 系1より

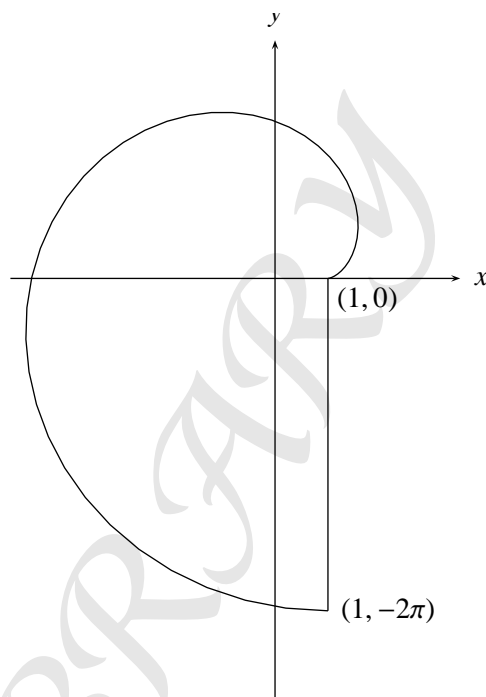
$$\begin{aligned}
 |D| &= \frac{1}{2} \oint_{C_1} (xdy - ydx) + \frac{1}{2} \oint_{C_2} -(xdy - ydx) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\gamma} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt + \frac{1}{2} \int_{\delta}^{\beta} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\delta} -\{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\gamma} |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| dt + \frac{1}{2} \int_{\delta}^{\beta} |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\delta} |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| dt \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$



[例]

$$C: \begin{cases} x = x(t) = \cos t + t \sin t & (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ と} \\ y = y(t) = \sin t - t \cos t & \end{cases}$$

2点  $(1, 0)$ ,  $(1, -2\pi)$  を結ぶ線分で囲まれた図形  $D$  の面積  $S$  を求める。

 $D$  の境界は

$$x = x(t) = \begin{cases} \cos t + t \sin t & (0 \leq t \leq 2\pi) \\ 1 & (2\pi \leq t \leq 4\pi) \end{cases} \quad y = y(t) = \begin{cases} \sin t - t \cos t & (0 \leq t \leq 2\pi) \\ t - 4\pi & (2\pi \leq t \leq 4\pi) \end{cases}$$

と表される。よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |(\cos t + \sin t)(t \sin t) - t \cos t(\sin t - t \cos t)| dt + \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} |1 \cdot 1 - 0 \cdot (t - 4\pi)| dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^2 dt + \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left[ t \right]_{2\pi}^{4\pi} \\ &= \frac{4}{3} \pi^3 + \pi \end{aligned}$$