

定積分について

定積分の定義を述べ、連続な関数は定積分可能であることを示そう。

1 Riemann 和

$a \leq x \leq b$ で定義された関数 $f(x)$ を考える。

$a \leq x \leq b$ の分点 $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ をとって、 $a \leq x \leq b$ を小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ に分けることを $a \leq x \leq b$ の分割という。分点 $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ を用いて考えた分割を $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ と表すことにする。また、 $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ を Δ の幅と呼ぶ。

2つの分割 Δ_1, Δ_2 の分点をあわせて作った分割を $\Delta_1 \cup \Delta_2$ と書く。また、 Δ_1 の分点がすべて Δ_2 の分点になっているとき $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ と書くことにし、 Δ_2 を Δ_1 の細分という。

さて、各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の中からひとつずつ実数 $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を選んで作った実数の組 $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ を Δ の(ひとつの)代表系という。

これらの言葉を用いて Riemann 和を定義する。

定義 (Riemann 和)

$\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を $a \leq x \leq b$ の分割とし、 $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ を代表系とする。また、 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で定義された関数とする。このとき

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

を (Δ, c) に関する $f(x)$ の Riemann 和という。

2 定積分の定義

$n \rightarrow \infty$ とするとき、 $a \leq x \leq b$ の分割 $\Delta^{\text{注1}}$ と、その代表系 c のとり方によらず、 (Δ, c) に関する $f(x)$ の Riemann 和が つねに一定の値に近づくとき、 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ において積分

^{注1} $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta| = 0$ となる分割だけを考える。

可能であるといい、その極限値を $f(x)$ の $a \leq x \leq b$ における定積分という^{注2}。
これを言い換えると次のようになる。

定義（定積分）

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分小さな $\delta > 0$ を (ε に応じて) とれば、 $|\Delta| < \delta$ なる任意の分割と、その任意の代表系 c に関して作った Riemann 和が、つねに

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - S \right| < \varepsilon$$

を満たすような定数 S がただひとつ存在するとき $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で積分可能である
といい $S = \int_a^b f(x) dx$ と書く。

目的は、次の定理を示すことである。

定理（積分可能性）

関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続のとき、 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で積分可能である。

3 一様連続性

前節の定理を証明するための準備をする。

区間 I で定義された関数 $f(x)$ が I において一様連続であるとは、
任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - y| < \delta \text{ となるどんな } x, y \in I \text{ に対してもつねに } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となることである。

^{注2}分割・代表系のとり方によらないので、高校数学では $a \leq x \leq b$ を n 等分した分割 $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$ 、小区間の右端の点 x_i の組 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を代表系にとって考える。

連続性は、各点を固定する毎に δ のとり方を決めればよかった（点が異なれば δ の値も異なってよい）のに対し、一様連続性は δ が点のとり方によらず I を通じて一定の値にとれるということを意味している。

一様連続性は連続性より強い条件であるが、閉区間では次が成り立つ。

定理

$a \leq x \leq b$ で連続な関数は $a \leq x \leq b$ で一様連続である。

一様連続ではないと仮定する。そうすると、ある $\varepsilon > 0$ があって、どのように $\delta > 0$ をとっても $|x - y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ となる $x, y \in [a, b]$ がある。

そこで n を自然数とし、 $\delta = \frac{1}{n}$ とするときに見つかる、このような x, y をそれぞれ x_n, y_n とする。

$$x_n, y_n \in [a, b] \text{ で } |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ かつ } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

ところで $\{x_n\}$ は上下に有界であるから Bolzano–Weierstrass の定理によって $\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{n(k)}\}$ を含む。 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)} = \alpha$ とおく。 $a \leq x_{n(k)} \leq b$ において $k \rightarrow \infty$ とすれば $a \leq \alpha \leq b$ と分かる。そうすると $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ において連続性であるから $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n(k)}) = f(\alpha)$ である。

一方、 $|x_{n(k)} - y_{n(k)}| < \frac{1}{n(k)}$ であるから

$$\begin{aligned} |y_{n(k)} - \alpha| &= |(y_{n(k)} - x_{n(k)}) + (x_{n(k)} - \alpha)| \\ &\leq |y_{n(k)} - x_{n(k)}| + |x_{n(k)} - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{n(k)} + |x_{n(k)} - \alpha| \rightarrow 0 + 0 = 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるので $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n(k)} = \alpha$ でもある。そうすると $f(x)$ の連続性から $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n(k)}) = f(\alpha)$ でもある。よって $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)})| = |\alpha - \alpha| = 0$ となる。

しかし、 k とは無関係な定数 ε があってつねに $|f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)})| \geq \varepsilon (> 0)$ であるから、 $|f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)})|$ が 0 に収束することはあり得ない。これは矛盾である。従って、 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ において一様連続である。■

4 積分可能性定理の証明

積分可能性定理を証明する。

まず, 分割 $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を固定して, 代表系をいろいろ取り換えるときの Riemann 和を考える。

$c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ をひとつの代表系とする。 $f(x)$ は連続であるから, 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において最大値 M_i , 最小値 m_i をもつ。 そうすると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

である。そこで $s(\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$, $S(\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ とおく。

$$s(\Delta) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(\Delta)$$

ここで, $s(\Delta)$, $S(\Delta)$ は代表系のとり方によらず, 分割 Δ のみによって決まることに注意する。また, $s(\Delta) \leq S(\Delta)$ である。

次が成り立つ。

- (1) $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ ならば $s(\Delta_1) \leq s(\Delta_2)$ かつ $S(\Delta_2) \leq S(\Delta_1)$ である。
- (2) 任意の Δ_1, Δ_2 に対し $s(\Delta_1) \leq S(\Delta_2)$ である。

- (1) の証明 $\Delta_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ とする。 Δ_2 の分点 y によって $[x_{i-1}, x_i]$ が $[x_{i-1}, y]$ と $[y, x_i]$ に分割されたとする。 $[x_{i-1}, x_i]$ における $f(x)$ の最小値を m_i , $[x_{i-1}, y]$ における最小値を k , $[y, x_i]$ における最小値を l とすると, $m_i \leq k$, $m_i \leq l$ であるから

$$\begin{aligned} m_i(x_i - x_{i-1}) &= m_i\{(x_i - y) + (y - x_{i-1})\} \\ &= m_i(x_i - y) + m_i(y - x_{i-1}) \\ &\leq k(x_i - y) + l(y - x_{i-1}) \end{aligned}$$

となる。従って $s(\Delta_1) \leq s(\Delta_2)$ が成り立つ。同様に $S(\Delta_2) \leq S(\Delta_1)$ も示される。

- (2) の証明 $\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$ とおくと, $\Delta_1 \subseteq \Delta_3$, $\Delta_2 \subseteq \Delta_3$ である。よって (1) より $s(\Delta_1) \leq s(\Delta_3)$, $S(\Delta_3) \leq S(\Delta_2)$ となる。ところが $s(\Delta_3) \leq S(\Delta_3)$ でもあるから $s(\Delta_1) \leq S(\Delta_2)$ と分かる。

以上で (1) (2) は示された。

定理の証明に戻る。 $[a, b]$ での $f(x)$ の最大値を M , 最小値を m とする。分割 Δ に対して $m(b-a) \leq s(\Delta) \leq S(\Delta) \leq M(b-a)$ であるから (2) とあわせると, 任意の分割 Δ_1, Δ_2 に対して $m(b-a) \leq s(\Delta_1) \leq S(\Delta_2) \leq M(b-a)$ となる。よって $\{s(\Delta)\}, \{S(\Delta)\}$ はともに有界となる。そこで $\{s(\Delta)\}$ の上限を s , $\{S(\Delta)\}$ の下限を S とおく。

ここで, もし $S < s$ とすると s が $\{s(\Delta)\}$ の最小上界であることから, S は $\{s(\Delta)\}$ の上界ではない。よって $S < s(\Delta_1)$ となる分割 Δ_1 がある。(2) より, 任意の分割 Δ_2 に対して $s(\Delta_1) \leq S(\Delta_2)$ であるから $S < s(\Delta_1) \leq S(\Delta_2)$ となる。そうすると $s(\Delta_1)$ は S より大きい $\{S(\Delta)\}$ の下界となるので S が $\{S(\Delta)\}$ の最大下界であることに反する。よって $s \leq S$ であり, 任意の分割 Δ_1, Δ_2 に対して

$$s(\Delta_1) \leq s \leq S \leq S(\Delta_2) \cdots 1$$

となる。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して

$$|\Delta| < \delta \text{ なる任意の分割 } \Delta \text{ に対し } S(\Delta) - s(\Delta) < \varepsilon \cdots 2$$

となることを示そう。

$f(x)$ は連続であるから, 前節の定理より $a \leq x \leq b$ で一様連続である。従って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して $|x - y| < \delta$ ならばつねに $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ となる。よって $|\Delta| < \delta$ なる分割をとると $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ であるから $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ となる。そうすると

$$\begin{aligned} S(\Delta) - s(\Delta) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となり 2 が示された。

2 の分割 Δ の任意の代表系 $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ に関する Riemann 和を考える。1 より $s(\Delta) \leq S \leq S(\Delta)$ である。また $s(\Delta), S(\Delta)$ の定義から $s(\Delta) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(\Delta)$ でも

あるから

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - S \right| \leq S(\Delta) - s(\Delta) \cdots 3$$

となる。これと 2 より

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - S \right| < \varepsilon$$

となる。

以上で、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分小さな $\delta > 0$ をとれば、 $|\Delta| < \delta$ なる任意の分割と、その任意の代表系 c に関して作った Riemann 和が、つねに

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - S \right| < \varepsilon$$

を満たすような定数 S の存在が分かった。

次に、 S の一意性を示そう。 S_1, S_2 がともに上の条件を満たすとする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分小さな $\delta > 0$ をとれば $|\Delta| < \delta$ となる分割 $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ とその代表系 $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ に対して

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - S_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdots 4$$

かつ

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - S_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdots 5$$

となる。よって

$$\begin{aligned} |S_1 - S_2| &= \left| \left(S_1 - \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \right) + \left(\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - S_2 \right) \right| \\ &\leq \left| S_1 - \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \right| + \left| \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - S_2 \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (4 \ 5 \text{より}) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となる。ここで ε は任意の正数であるから $S_1 = S_2$ である。

以上で、定理の証明は終了した。■

上の証明より、定積分の値 S は、代表系を各小区間の最大値にとった Riemann 和の下限 $\inf\{S(\Delta)\}$ であることが分かった。一方、証明の中の 1 と 2 より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$0 \leq S - s \left(< S(\Delta) - s(\Delta) \right) < \varepsilon$$

となるから、実は $S = s$ でもある。つまり定積分の値は、代表系を各小区間の最小値にとった Riemann 和の上限 $\sup\{s(\Delta)\}$ でもある。