

## (積分と微分の関係)

$f(t, x)$ ,  $f_x(t, x)$  は連続で,  $a(x)$ ,  $b(x)$  が微分可能のとき, 次が成り立つ。

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(t, x) dt + f(b(x), x)b'(x) - f(a(x), x)a'(x)$$

但し,  $f_x(t, x)$  は,  $t$  を定数と見て  $f(t, x)$  を  $x$  で微分 ( $x$  に関する偏微分) したものを表す。

大雑把な説明をしておく。

$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt$  とおく。  $F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$  を計算するのが目的である。

$$\begin{aligned} & \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \int_{a(x+\Delta x)}^{b(x+\Delta x)} f(t, x + \Delta) dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \int_{a(x+\Delta x)}^{a(x)} f(t, x + \Delta) dt + \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x + \Delta) dt + \int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(t, x + \Delta) dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt \right\} \\ &= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{f(t, x + \Delta) - f(t, x)}{\Delta x} dt + \frac{1}{\Delta x} \int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(t, x + \Delta) dt - \frac{1}{\Delta x} \int_{a(x+\Delta x)}^{a(x)} f(t, x + \Delta) dt \end{aligned}$$

ここで, 平均値の定理より

$$\frac{f(t, x + \Delta) - f(t, x)}{\Delta x} = f_x(t, x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

と書ける。一方  $F_t(t, x) = f(t, x)$ , つまり  $f(t, x)$  において  $x$  を定数と見たときの  $t$  の関数  $f(t, x)$  の原始関数を  $G(t, x)$  とすると

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(t, x + \Delta) dt \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(b(x + \Delta x), x + \Delta) - G(b(x), x + \Delta)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{G(b(x + \Delta x), x + \Delta) - G(b(x), x)}{\Delta x} - \frac{G(b(x), x + \Delta) - G(b(x), x)}{\Delta x} \right\} \\ &= G_t(b(x), x)b'(x) + G_x(b(x), x) - G_x(b(x), x) \\ &= f(b(x), x)b'(x) \end{aligned}$$

となる。同様に

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{a(x)}^{a(x+\Delta x)} f(t, x + \Delta x) dt = f(a(x), x) a'(x)$$

よって

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{f(t, x + \Delta x) - f(t, x)}{\Delta x} dt + \frac{1}{\Delta x} \int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(t, x + \Delta x) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\Delta x} \int_{a(x)}^{a(x+\Delta x)} f(t, x + \Delta x) dt \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(t, x + \theta \Delta x) dt + \frac{1}{\Delta x} \int_{b(x)}^{b(x+\Delta x)} f(t, x + \Delta x) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\Delta x} \int_{a(x)}^{a(x+\Delta x)} f(t, x + \Delta x) dt \right\} \\ &= \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(t, x) dt + f(b(x), x) b'(x) - f(a(x), x) a'(x) \blacksquare \end{aligned}$$

[例]  $f(t, x) = \sin(t - x)$  のとき  $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t - x) dt$  を計算する。

$f_x(t, x) = -\cos(t - x)$  であるから

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t - x) dt \\ &= \int_0^x f_x(t, x) dt + f(x, x)(x)' - f(0, x)(0)' \\ &= \int_0^x \left\{ -\cos(t - x) \right\} dt + 0 \cdot 1 - \sin(-x) \cdot 0 \\ &= \left[ -\sin(t - x) \right]_0^x \\ &= \sin(-x) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$