

(積分型の Taylor の定理)

n を自然数とする。 $f^{(n)}(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続のとき

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

部分積分を繰返し用いる。

$$\begin{aligned} & f(b) - f(a) \\ &= \int_a^b f'(t) dt \\ &= \int_a^b \{-(b-t)\}' f'(t) dt \\ &= \left[-(b-t)f'(t) \right]_a^b + \int_a^b (b-t)f''(t) dt \\ &= (b-a)f'(a) + \int_a^b \left\{ -\frac{(b-t)^2}{2} \right\}' f''(t) dt \\ &= (b-a)f'(a) + \left[-\frac{(b-t)^2}{2} \cdot f''(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \\ &= (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \int_a^b \left\{ -\frac{(b-t)^3}{3!} \right\}' f^{(3)}(t) dt \\ & \quad \dots\dots\dots \\ &= (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} \cdot f^{(3)}(a) + \dots \\ & \quad \dots + \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) dt \\ &= (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} \cdot f^{(3)}(a) + \dots \\ & \quad \dots + \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) dt \\ &= (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} \cdot f^{(3)}(a) + \dots \\ & \quad \dots + \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) dt \\ &= (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} \cdot f^{(3)}(a) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdots + \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a) + \int_a^b \left\{ -\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right\}' f^{(n-1)}(t) dt \\
 &= (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} \cdot f^{(3)}(a) + \cdots \\
 & \cdots + \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a) + \left[-\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \\
 &= (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} \cdot f^{(3)}(a) + \cdots \\
 & \cdots + \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a) + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

上の定理は $b \leq a$ のときもそのまま成り立つ。

b を x に置き換えると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

[例] $f(x) = e^x$, $a = 0$ とすると, $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$ であるから

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + R_n$$

但し $R_n = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t dt$

ここで, $x \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 0 \leq R_n &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t dt \\
 &\leq \int_0^x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^x dt \quad \leftarrow 0 \leq t \leq x \text{ に注意} \\
 &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^x \int_0^x dt = \frac{x^n}{(n-1)!} e^x
 \end{aligned}$$

そして $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{(n-1)!} e^x = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ となる。

一方, $x \leq 0$ のときは $R_n = - \int_x^0 \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t dt$ において

$$\begin{aligned}
 0 \leq |R_n| &= \left| \int_x^0 \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t dt \right| \\
 &\leq \int_x^0 \left| \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t \right| dt \quad \text{☞ } x \leq t \leq 0 \text{ より } |x-t| \leq |x|, e^t \leq e^{|x|} \\
 &\leq \int_x^0 \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} e^{|x|} dt \\
 &= \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} e^{|x|} \int_x^0 dt \quad \text{☞ } x \leq 0 \text{ より } -x = |x| \\
 &= \frac{|x|^n}{(n-1)!} e^{|x|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

従って, x によらずつねに $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ となり

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

である。