

最大値・最小値の原理

Bolzano–Weierstrass の定理を用いて、連続な関数は閉区間において必ず最大値・最小値をとることを証明しよう。

1 Bolzano–Weierstrass の定理

Bolzano–Weierstrass の定理を証明するために、まず次の補題を示す。

補題

閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n]$ が $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ を満たすとする。
このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ ならば $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに同じ値 a に収束する。

仮定より

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_1$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots \geq a_1$$

である。よって $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であり、 $\{b_n\}$ は下に有界な単調減少数列である。よって $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに収束するので $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ とおく。このとき a は $\{a_n\}$ の上限、 b は $\{b_n\}$ の下限であることに注意しよう^{注1}。

$a \leq b$ となることを示そう。

そのために、 $a > b$ と仮定する。 a は最小上界であるから b は $\{a_n\}$ の上界ではない。よって $b < a_{n_1}$ となる番号 a_{n_1} が存在する。ところが $\{a_n\}, \{b_n\}$ のとり方から、任意の n, m に対してつねに $a_n \leq b_m$ であるから、任意の m に対して $b < a_{n_1} \leq b_m$ となる。そうすると a_{n_1} は b より大きな $\{b_n\}$ の下界となるから b が最大下界であることに反する。よって $a \leq b$ である。

従って、任意の n に対してつねに $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ である。つまり

$$b_n - a_n \geq b - a \geq 0$$

となる。そして $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ であるから $b = a$ となる。■

上の補題を用いて次を示す。

^{注1} 有界単調数列が収束することの証明参照。

定理 (Bolzano–Weierstrass)

上に有界かつ下に有界な無限数列 $\{a_n\}$ は、収束する部分列を含む。

$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ は上下に有界なので、ある閉区間 $I = [m, M]$ があって

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subseteq I$$

となる。 I を 2 等分して $\left[m, \frac{m+M}{2} \right]$, $\left[\frac{m+M}{2}, M \right]$ とする。この 2 つの区間のどちらにも有限個の a_n しか含まれないとすると $\{a_n\}$ は有限数列となってしまうので、少なくともどちらか一方には無限に多くの a_n が含まれる。そこで、無限に多くの a_n を含む方を $I_1 = [m_1, M_1]$ とする。

$$I = [m, M] \supseteq I_1 = [m_1, M_1], \quad M_1 - m_1 = \frac{M - m}{2}$$

である。

次に I_1 を 2 等分して今と同じ操作をして $I_2 = [m_2, M_2]$ を作る。

以下、この操作を繰り返して $I_n = [m_n, M_n]$ を作ると

$$I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots, \quad M_n - m_n = \frac{M - m}{2^n}$$

となる。

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n - m_n) = \frac{M - m}{2^n} = 0$ であるから、補題から $\{M_n\}, \{m_n\}$ は同じ値 a に収束する。

そこで、以下この a に収束する部分列を作る。

I_1 に含まれる a_n のうち最初の番号のものを $a_{n(1)}$ とする。次に I_2 に含まれる a_n のうち $a_{n(1)}$ 以外で最初の番号のものを $a_{n(2)}$ とする。以下同様にして

$$I_k \text{ に含まれる } a_n \text{ のうち } a_{n(1)}, a_{n(2)}, \dots, a_{n(k-1)} \text{ 以外で最初の番号のものを } a_{n(k)}$$

とする。仮定より I_k には無限に多くの a_n が含まれているのでこの操作を続けて

$$a_{n(1)}, a_{n(2)}, \dots, a_{n(k)}, \dots$$

という部分列を作ることができる。

ここで、 $m_k \leq a_{n(k)} \leq M_k$ であり、また $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k = a$ であるから、はさみうちの原理より $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = a$ となり示された。■

2 最大値・最小値の原理

定理 (最大値・最小値の原理)

連続な関数 $f(x)$ は, 閉区間 $a \leq x \leq b$ において必ず最大値・最小値をもつ。

$K = \left\{ f(x) \mid a \leq x \leq b \right\}$ とおくと, K は上下に有界であることを示す。

もし, K が上に有界でないとすると, 任意の自然数 n に対し $f(x_n) > n$ ($a \leq x_n \leq b$) となる x_n が存在する。 $\{x_n\}$ は上下に有界な数列であるから, Bolzano–Weierstrass の定理より収束部分列 $\{x_{n(k)}\}$ を含む。そこで $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)} = \alpha$ とおく。つねに $a \leq x_{n(k)} \leq b$ であるから $k \rightarrow \infty$ とすると $a \leq \alpha \leq b$ であることが分かる。特に $f(\alpha)$ は有限な値である。また, $f(x)$ の連続性から $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n(k)}) = f(\alpha)$ である。ところが $x_{n(k)}$ のとり方から $f(x_{n(k)}) > n(k)$ であり, また $k \rightarrow \infty$ のとき $n(k) \rightarrow \infty$ であるから $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n(k)}) = \infty$ となる。これは $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n(k)}) = f(\alpha)$ が有限な値であることに反する。従って K は上に有界である。下に有界であることも同様に示される。

さて, K は上下に有界であるから, 上限 $u = \sup K$, 下限 $l = \inf K$ が存在する。よって, あと $u, l \in K$ が言えれば, u は $f(x)$ がとり得る値の中で最も大きいもの, つまり最大値となり, l は $f(x)$ がとり得る値の中で最も小さいもの, つまり最小値となるので証明は終る。

どちらも同様なので, $u \in K$ のみ示す。

n を任意の自然数とする。 u は最小上界であるから, $u - \frac{1}{n}$ はもはや上界ではない。よって $u - \frac{1}{n} < f(t_n)$ ($a \leq t_n \leq b$) となる t_n がある。そうすると $u - f(t_n) < \frac{1}{n}$ である。また, u は $f(x)$ の値域の上界であるから $f(t_n) \leq u$ つまり $0 \leq u - f(t_n)$ である。よって $0 \leq u - f(t_n) < \frac{1}{n}$ となるから $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = u$ である。

$\{t_n\}$ は上下に有界なので Bolzano–Weierstrass の定理より収束部分列 $\{t_{n(k)}\}$ をもつ。 $\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} t_{n(k)}$ とおく。 $a \leq t_{n(k)} \leq b$ であるから $k \rightarrow \infty$ とすると $a \leq \beta \leq b$ が分かる。また $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = u$ であるから $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n(k)}) = u$ でもある。ここで連続性から $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n(k)}) = f(\beta)$ であるから $u = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n(k)}) = f(\beta)$ である。よって $u = f(\beta)$ となり $u \in K$ が示された。■