

1 無限小

関数 $f(t)$ が $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = 0$ を満たすなら $f(t)$ は $t \rightarrow a$ のとき無限小であると言う。

例 1.1

- (1) $\lim_{t \rightarrow 1} (t-1)^2 = 0$ であるから $t \rightarrow 1$ のとき $(t-1)^2$ は無限小である。
- (2) $\lim_{t \rightarrow 1} (t-1)^3 = 0$ であるから $t \rightarrow 1$ のとき $(t-1)^3$ は無限小である。

次に、2つの無限小を比較するために言葉を約束する。

$f(t)$, $g(t)$ がともに $t \rightarrow a$ のとき無限小とする。このとき $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$ となるなら $f(t)$ は $g(t)$ より高位の無限小であると言い $f(t) = o(g(t))$ ($t \rightarrow a$) と書く。

例 1.2 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)^3}{(t-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 1} (t-1) = 0$ であるから $(t-1)^3$ は $(t-1)^2$ より高位の無限小である。 $(t-1)^3 = o((t-1)^2)$ ($t \rightarrow 1$)

例 1.3 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能のとき $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ であるから $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0$ となる。よって

$$f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) + o(x - a) \quad (x \rightarrow a)$$

であるこれは、 $f(x) \doteq f'(a)(x-a) + f(a)$ と近似すると、その誤差 $f(x) - \{f'(a)(x-a) + f(a)\}$ が $x - a$ より高位の無限小となることを意味している。また $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ が $x = a$ における $y = f(x)$ の接線の方程式であることに注意すると、 $x \doteq a$ のときは $y = f(x)$ を接線で近似できることが分かる。

例 1.4 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能とすると $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

となる。従って、 $h \rightarrow 0$ のとき $f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ は h より高位の無限小である。つまり $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ ($h \rightarrow 0$) である。

逆に $f(a+h) - f(a) - Ah = o(h)$ ($h \rightarrow 0$) となるような h と無関係な定数 A が存在したとすると

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A \right)$$

であるから、 $A = f'(a)$ となる。従って

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

となる定数 A が存在することである。このとき $A = f'(a)$ と表す。

$y = f(x)$ に対して x が Δx 増えるときの y の増分 $f(x + \Delta x) - f(x)$ を Δy で表すことにする。つまり $\Delta y = f(x + \Delta) - f(x)$ とおく。(例 1-2)(3) において a を x で置き換え、 h を Δx で置き換えると $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$) となる。よって

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

である。これは $\Delta y \cong f'(x)\Delta x$ と近似するとき、その誤差 $\Delta y - f'(x)\Delta x$ が Δx より高位の無限小であることを意味している^{注1}。そこで Δy の主要部 $f'(x)\Delta x$ を関数 $f(x)$ の微分 (differential) ということにし、記号で dy , df , $df(x)$ などと書くことにする。

$$dy = df = df(x) = f'(x)\Delta x$$

$f(x) = x$ のときは $f'(x) = 1$ であるから $dx = df(x) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ である。従って $dx = \Delta x$ であるから、これを上の式に代入して

$$dy = df = df(x) = f'(x)dx$$

^{注1} 誤差は Δx に比べてもっと小さいということ。

と書くことにする。

$y = f(x)$ に対して $dy = f'(x)dx$ とは, Δy の主要部が $f'(x)\Delta x$ であるということ。つまり $\Delta y \doteq f'(x)\Delta x$ と近似するとき, その誤差が Δx より高位の無限小であるということ。言い換えると $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0$ ということである。

例 1.5 $f(x) = x^2$ の微分 (differential) は $df(x) = 2xdx$ である。

2 多変数関数の微分

2変数関数 $z = F(x, y)$ の微分も例 1.4 と同様に定義される。

$F(x, y)$ が (a, b) において微分可能であるとは, h, k に無関係な定数 A, B が存在して

$$F(a+h, b+k) = F(a, b) + Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad ((h, k) \rightarrow (0, 0))$$

となることである。1変数の場合は, 定数 A は微分係数に等しかった。2変数の場合に, A, B がどのような数であるかを調べよう。

上の式において $k = 0$ とすると

$$F(a+h, b) = F(a, b) + Ah + o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

となる。従って $f(x) = F(x, b)$ とおくと

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

となる。よって $A = f'(a)$ に他ならない。つまり A は $F(x, y)$ において y を $y = b$ と固定して $F(x, b)$ を x の関数と見るときの $x = a$ における微分係数である。これを (a, b) における $F(x, y)$ の x に関する偏微分係数と言い $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b)$, $F_x(a, b)$ などと表す。同様に $F(x, y)$ において x を $x = a$ と固定して $F(a, y)$ を y の関数と見るときの $y = b$ における微分係数が B である。これを (a, b) における $F(x, y)$ の y に関する偏微分係数と言い $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$, $F_y(a, b)$

などを書く。以上で $A = \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)$, $B = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ と分かった。

上の議論において a を x で, b を y で, h を Δx で, k を Δy で置き換え, また $\Delta z = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)$ とおくと

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + o(s) \quad (s \rightarrow 0)$$

となる。但し $s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ とし, また $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ である。

上で見たように $\frac{\partial F}{\partial x}$ は $F(x, y)$ において y を定数とみなして, 変数 x について微分したものである。これを $F(x, y)$ の x に関する偏導関数という。同様に x を定数とみなして, 変数 y について微分したものを $\frac{\partial F}{\partial y}$ を y に関する偏導関数という。

例 2.1 $F(x, y) = x^2y + 3x - y$ のとき $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 1$ である。

1 変数のときと同様に Δz の主要部 $\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y$ を $z = F(x, y)$ の全微分^{注2} と言い dz , dF , $dF(x, y)$ などと書く。

$$dz = dF = dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y$$

$F(x, y) = x$ のとき $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ であるから $dz = dF(x, y) = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x$ となる。同様に $dy = \Delta y$ でもあるので, これらを代入すると

$$dz = dF = dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

となる。

例 2.2 $z = F(x, y) = x^2y$ のとき全微分は $dz = 2xydx + x^2dy$ である。

$F(x, y)$ が全微分可能^{注3} のとき $dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$ とは Δz の主要部が $\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y$ となるということである。

3 変数関数についても同様に微分可能性・全微分・偏微分が定義される。

^{注2} 偏微分と区別するために全微分という言葉を使う。

^{注3} $F(x, y)$ が (a, b) の近くで偏微分可能で $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ が (2 変数関数として) 連続のとき (a, b) において $F(x, y)$ は全微分可能となる。

$u = F(x, y, z)$ が全微分可能のとき

$$du = dF = dF(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

ここでひとつ計算公式を述べておく。

定理 2.1 (合成微分の公式)

$z = F(x, y)$ が全微分可能で $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ が微分可能であるとき, $z = F(\varphi(t), \psi(t))$ は微分可能で

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

となる。3変数関数 $u = F(x, y, z)$ のときも同様に

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

となる。

t が Δt だけ増えるときの x, y, z の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とし $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ とおくと

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o(\Delta s)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ であるから $\Delta s \rightarrow 0$ である。

$$\begin{aligned} \frac{o(\Delta s)}{\Delta t} &= \frac{o(\Delta s)}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{o(\Delta s)}{\Delta s} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \rightarrow 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

よって $\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{o(\Delta s)}{\Delta t}$ において $\Delta t \rightarrow 0$ とすると $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ を得る。■

3 接線・接平面

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ とパラメータ表示された xy 平面上の曲線 $C : F(x, y) = 0 \cdots 1$ を考える。

$a = x(t_0)$, $b = y(t_0)$ とし $P(a, b)$ とおく。 $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ が $\vec{0}$ でないとき, これを P における C の接ベクトルとすることにする。 P における接ベクトルに平行で, P を通る直線を P における C の接線と呼ぼう。合成微分の公式によれば

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

であるから 1 の両辺を t で微分すると

$$F_x(a, b)x'(t_0) + F_y(a, b)y'(t_0) = 0$$

となる。従って $\begin{pmatrix} F_x(a, b) \\ F_y(a, b) \end{pmatrix}$ と接ベクトルは直交する。よって接線は (a, b) を通り

$\begin{pmatrix} F_x(a, b) \\ F_y(a, b) \end{pmatrix}$ に垂直な直線であるから, その方程式は

$$F_x(a, b)(x - a) + F_y(a, b)(y - b) = 0$$

となる。特に $C : y = f(x)$ のときは $F(x, y) = y - f(x)$ とおくと

$$F_x(x, y) = -f'(x), \quad F_y(x, y) = 1$$

となるので接線の方程式は $-f'(a)(x - a) + 1 \cdot (y - b) = 0$ つまり

$$y - b = f'(a)(x - a)$$

となる。

例 3.1 $F(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 5$ とおくと

$$F_x(x, y) = 2x + 2y, \quad F_y(x, y) = 2x + 4y$$

となるので, $C : x^2 + 2xy + 2y^2 - 5 = 0$ 上の点 (x_0, y_0) における C の接線の方程式は $(2x_0 + 2y_0)(x - x_0) + (2x_0 + 4y_0)(y - y_0) = 0$ つまり

$$(x_0 + y_0)(x - x_0) + (x_0 + 2y_0)(y - y_0) = 0$$

となる。

今度は xyz 空間内の曲面 $S : F(x, y, z) = 0 \cdots 2$ を考えよう。 $F(x, y, z)$ は全微分可能とする。 $P(a, b, c)$ を S 上の点とし、 P を通る S 上の (空間) 曲線を $\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ とし、 $a = x(t_0)$, $b = y(t_0)$, $c = z(t_0)$ とする。合成微分の公式によれば

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

であるから 2 の両辺を t で微分すると

$$F_x(a, b, c)x'(t_0) + F_y(a, b, c)y'(t_0) + F_z(a, b, c)z'(t_0) = 0$$

となる。従って $\begin{pmatrix} F_x(a, b, c) \\ F_y(a, b, c) \\ F_z(a, b, c) \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}$ は直交する。ここで $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}$ は P における ℓ の

接線の方向ベクトルである。従って $\begin{pmatrix} F_x(a, b, c) \\ F_y(a, b, c) \\ F_z(a, b, c) \end{pmatrix}$ に垂直で P を通る平面 π は ℓ の接線を含

むことが分かる。 ℓ は P を通る S 上の任意の曲線であったから π は P を通る S 上の任意の曲線の P における接線を含むことが分かった。よって π は P における S の接平面である。そして、その方程式は

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

となる。特に $S : z = f(x, y)$ のときは $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ とおくと

$$F_x(x, y, z) = -f_x(x, y), \quad F_y(x, y, z) = -f_y(x, y), \quad F_z(x, y, z) = 1$$

となるので接平面の方程式は $-f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b) + 1 \cdot (z - c) = 0$ つまり

$$z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

である。

例 3.2 $K : z = x^2 + y^2$ 上の点 $A(x_0, y_0, z_0)$ における K の接平面の方程式を求めよう。 $f(x, y) = x^2 + y^2$ とおくと $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2y$ であるから $z - z_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$ が接平面の方程式である。

$z = f(x, y)$ の全微分は

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

であるから

$$z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}) \quad ((x, y) \rightarrow (a, b))$$

である。但し, $c = f(a, b)$ である。従って $(x, y) \equiv (a, b)$ のとき

$$z \equiv f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

と近似できることが分かる。ここで

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

は $(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式であるから $(x, y, z) \equiv (a, b, f(a, b))$ のとき $z = f(x, y)$ は接平面で近似できることが分かった。

4 包絡線

xy 平面上の曲線群 $C_t : f(x, y, t) = 0$ を考える。曲線 E が曲線群 $\{C_t\}$ の包絡線であると
 は (i) E はすべての C_t に接する (ii) E のどの点もあるひとつの C_t との接点である の2条件
 を満たすことである。

定理 4.1 (包絡線の必要条件)

曲線 E が曲線群 $C_t : f(x, y, t) = 0$ の包絡線ならば,

E の各点 (x, y) は $\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \cdots 1 \\ f_t(x, y, t) = 0 \cdots 2 \end{cases}$ を満たす。

E と C_t の接点 $P(x, y)$ は C_t 上にあるから 1 が満たされるのは明らか。 $x = x(t)$, $y = y(t)$ で与えられるとする。 t が変化するとき P の描く曲線が E であってこれが E のパラメータ表示である。よってこれを 1 に代入して $f(x(t), y(t), t) = 0$ である。合成微分の公式によって, この両辺を t で微分すると

$$f_x(x(t), y(t), t) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t), t) \cdot y'(t) + f_t(x(t), y(t), t) \cdot 1 = 0 \cdots 3$$

となる。ところで E のパラメータ表示が $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ であったから P での E の接ベクトル

は $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ である。一方 C_t の方程式は $f(x, y, t) = 0$ であるから (t は定数), その接線の方

程式は

$$f_x(x(t), y(t), t) \cdot (x - x(t)) + f_y(x(t), y(t), t) \cdot (y - y(t)) = 0$$

である。従ってその法線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} f_x(x(t), y(t), t) \\ f_y(x(t), y(t), t) \end{pmatrix}$$

である。よって $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} f_x(x(t), y(t), t) \\ f_y(x(t), y(t), t) \end{pmatrix}$ であり,

$$f_x(x(t), y(t), t) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t), t) \cdot y'(t) = 0 \cdots 4$$

である。4 を 3 を代入すると $f_t(x(t), y(t), t) = 0$ となるので 2 も成り立つ。■

上の定理によれば、 $\{C_t\}$ の包絡線は 1 2 を同時に満たす曲線でなければならないことが分かった。そのような曲線は 1 2 から t を消去してもよいし、 t によるパラメータ表示してもよい。しかし、1 2 を同時に満たす曲線がすべて包絡線とは限らないことに注意しよう。

曲線 $C : f(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) に対して $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となるとき (a, b) を C の特異点という。

定理 4.2 (包絡線の十分条件)

曲線群 $C_t : f(x, y, t) = 0$ に対して $\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \cdots 1 \\ f_t(x, y, t) = 0 \cdots 2 \end{cases}$ を満たす (x, y) が $x(t), y(t)$ で

$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ を満たすものによって $x = x(t), y = y(t) \cdots 3$ と表されるならば,

曲線 $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ は曲線群 $\{C_t\}$ の包絡線か、または各 C_t の特異点の軌跡である。

特にどの C_t も特異点をもたないときは、上の C は包絡線となる。

3 を 1 に代入すると $f(x(t), y(t), t) = 0 \cdots 4$ となる。

よって C 上の点 $P(x(t), y(t))$ は C_t 上にある。合成微分の公式を使って 4 の両辺を微分すると

$$f_x(x(t), y(t), t)x'(t) + f_y(x(t), y(t), t)y'(t) + f_t(x(t), y(t), t) = 0 \cdots 5$$

となる。一方 3 を 2 に代入すると

$$f_t(x(t), y(t), t) = 0 \cdots 6$$

であるから 6 を 5 に代入して

$$f_x(x(t), y(t), t)x'(t) + f_y(x(t), y(t), t)y'(t) = 0$$

を得る。これは

$$\begin{pmatrix} f_x(x(t), y(t), t) \\ f_y(x(t), y(t), t) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \cdots 7$$

を示している。

仮定から $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ であり、これは C の P での接ベクトルである。

一方、 $\begin{pmatrix} f_x(x(t), y(t), t) \\ f_y(x(t), y(t), t) \end{pmatrix} = \vec{0}$ のときは P は C_t の特異点である。

$\begin{pmatrix} f_x(x(t), y(t), t) \\ f_y(x(t), y(t), t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ のときは、これは C_t の P における法線ベクトルである。よって

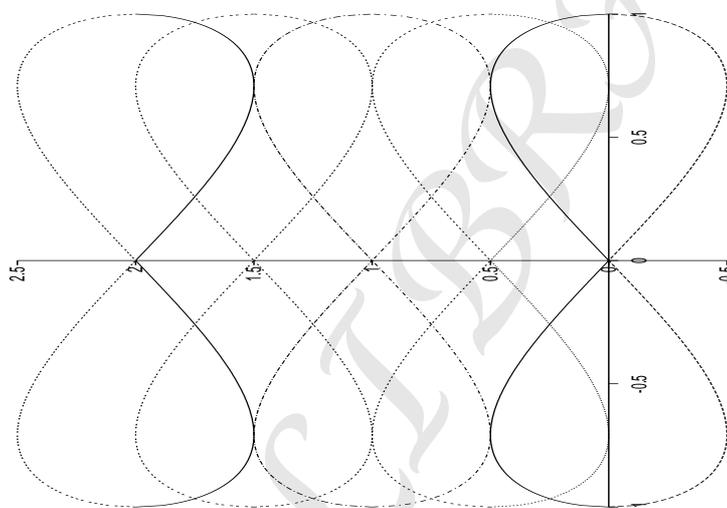
7 は C と C_t が P で接することを示している。よって C は C_t の包絡線になる。■

例 4.1 直線群 $l_\theta : (\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 1 \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \cdots 1$ の包絡線 C を求めよう。

1 を θ で偏微分すると $-(\sin \theta)x + (\cos \theta)y = 0 \cdots 2$ である。 $1 \times \cos \theta - 2 \times \sin \theta$ より $x = \cos \theta$ となる。また $1 \times \sin \theta + 2 \times \cos \theta$ より $y = \sin \theta$ である。そして l_θ はど

れも特異点をもたないので、 $C : \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ が包絡線となる。

例 4.2 曲線群 $C_t : x^4 - x^2 + (y-t)^2 = 0$ の包絡線を考える。 $f(x, y, t) = x^4 - x^2 + (y-t)^2$ とおく。 $f_t(x, y, t) = 2(y-t)$ であるから $f(x, y, t) = 0$ と $f_t(x, y, t) = 0$ を連立して解くと $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}$ または $\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases}$ または $\begin{cases} x(t) = -1 \\ y(t) = t \end{cases}$ となる。 よって t を動かすときの軌跡はそれぞれ、直線 $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ となる。 このうち $x = 1$, $x = -1$ は包絡線である。 しかし、 $f_x(x, y, t) = 4x^3 - 2x$, $f_y(x, y, t) = 2(y-t)$ であるから $f_x(0, t, t) = 0$ かつ $f_y(0, t, t) = 0$ となり $(0, t)$ は C_t の特異点である。 従って、直線 $x = 0$ は包絡線ではなく特異点の軌跡である。



[注] $\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \cdots 1 \\ f_t(x, y, t) = 0 \cdots 2 \end{cases}$ を満たす点 $(x(t), y(t))$ の集合 C であっても、 $x'(t) = 0$ かつ $y'(t) = 0$ となるとき t が存在するとき (十分条件の定理の仮定を満たしていない) は包絡線ではなく、また特異点の軌跡でもないことがある。

例 4.3 直線群 $C_t : y = t(x-1)$ を考える。 $f(x, y, t) = t(x-1) - y$ とおく。 $f_t(x, y, t) = x-1$ であるから、 $f(x, y, t) = 0$ と $f_t(x, y, t) = 0$ を連立して解くと $\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 0 \end{cases}$ となる。 これは、1点 $(1, 0)$ を表すから、包絡線ではない。 また C_t は特異点をもたない。