

l'Hospital の定理

Cauchy の平均値定理の応用として $\frac{0}{0}$ 型, あるいは $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形の極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ を計算するとき便利な定理が l'Hospital の定理である。

定理 1.1

$f(x), g(x)$ は, a の近くで連続で, $f(a) = g(a) = 0$ とし, また $x \neq a$ のとき, a の近くでつねに $g(x) \neq 0$ とする。更に a の近くで $x \neq a$ のとき $f(x), g(x)$ は微分可能で $f'(x)$ と $g'(x)$ は同時には 0 にならないものとする。このとき, もし $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ となる。

$f(a) = g(a) = 0$ より $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ である。 x が a に十分近く, $x \neq a$ のとき $f'(x)$ と $g'(x)$ は同時には 0 とならず, また $g(x) \neq 0$ つまり $g(x) \neq g(a)$ であるから Cauchy の平均値定理が使えて $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ (c は a と x の間) となる c がある。

$x \rightarrow a$ のとき $c \rightarrow a$ となるがいま, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するので $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ と

なる。よって $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ となる。 ■

$x \rightarrow \infty$ とするときも同様の定理が成り立つ。

定理 1.2

$f(x), g(x)$ が十分大きなすべての x に対し微分可能で $g'(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) =$

0 を満たすものとする。このとき $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ である。

$t = \frac{1}{x}$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow 0+0$ である。そして $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}$

である。ここで $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ とおくと $F'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$, $G'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ であるから

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となる。ここで $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら, $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{F'(t)}{G'(t)}$ も存在するので, 定理 1.1 より

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{F'(t)}{G'(t)}$ となる。従って

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となり示された。■

次に $\frac{\infty}{\infty}$ 型のときに考える。

定理 1.3

$f(x)$, $g(x)$ が十分大きなすべての x に対し微分可能で $g'(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ を満たすとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ である。

$\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$... 1 とおく。任意の $\varepsilon > 0$ をとる。

$b \geq G$ のときつねに $\left| \frac{f(b)}{g(b)} - \ell \right| < \varepsilon$ となるような G が存在することを示せばよい。

1 より $x \geq A$ のときつねに $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる A が存在する。 $b > A$ のとき

Cauchy の平均値定理より $\frac{f(b) - f(A)}{g(b) - g(A)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ($A < c < b$) となる c がある。この式を書

き直すと

$$\frac{f(b)}{g(b)} \cdot \frac{1 - \frac{f(A)}{f(b)}}{1 - \frac{g(A)}{g(b)}} = \frac{f(b) - f(A)}{g(b) - g(A)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

である。よって $\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(A)}{g(b)}}{1 - \frac{f(A)}{f(b)}}$ となる。また、 $c > A$ であるから

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ である。ここで } b \rightarrow \infty \text{ とするとき } g(b) \rightarrow \infty, f(b) \rightarrow \infty \text{ であるから}$$

$$\frac{1 - \frac{g(A)}{g(b)}}{1 - \frac{f(A)}{f(b)}} \rightarrow 1 \text{ となる。よって } b \geq T \text{ のときつねに } \left| \frac{1 - \frac{g(A)}{g(b)}}{1 - \frac{f(A)}{f(b)}} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2\left(|\ell| + \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

となる T がある。そこで $G = \max\{A, T\}$ とおくと $b \geq G$ のときつねに

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2} \dots 2 \quad \text{かつ} \quad \left| \frac{1 - \frac{g(A)}{g(b)}}{1 - \frac{f(A)}{f(b)}} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2\left(|\ell| + \frac{\varepsilon}{2}\right)} \dots 3$$

となる。そうすると

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(b)}{g(b)} - \ell \right| \\ &= \left| \frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right| \\ &\leq \left| \frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right| \\ &= \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \left| \frac{1 - \frac{g(A)}{g(b)}}{1 - \frac{f(A)}{f(b)}} - 1 \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right| \quad (\text{2, 3 を代入する}) \\ &< \left(|\ell| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\varepsilon}{2\left(|\ell| + \frac{\varepsilon}{2}\right)} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{2 より } \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| < |\ell| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となる。つまり $b \geq G$ のときつねに $\left| \frac{f(b)}{g(b)} - \ell \right| < \varepsilon$ となり示された。■

定理 1.4

$f(x), g(x)$ が a の近くにおいて a 以外では微分可能で $g'(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ を満たすとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ である。

$x \rightarrow a+0$ のときは $t = x - a$ とおくと $t \rightarrow 0+0$ であるから $s = \frac{1}{t}$ とおくと $s \rightarrow \infty$ となる。また $x \rightarrow a-0$ のときは $t = a - x$ とおくと $s \rightarrow \infty$ なる。どちらも同様なので前者のときのみ考える。

$$F(s) = f\left(\frac{1}{s} + a\right), G(s) = g\left(\frac{1}{s} + a\right) \text{ とおくと}$$

$$F'(s) = f'\left(\frac{1}{s} + a\right)\left(-\frac{1}{s^2}\right), G'(s) = g'\left(\frac{1}{s} + a\right)\left(-\frac{1}{s^2}\right) \text{ であって}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F'(s)}{G'(s)} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{s} + a\right)\left(-\frac{1}{s^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{s} + a\right)\left(-\frac{1}{s^2}\right)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{s} + a\right)}{g'\left(\frac{1}{s} + a\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在するから 定理 1.3 より } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F(s)}{G(s)} \text{ も存在して} \end{aligned}$$

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F(s)}{G(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F'(s)}{G'(s)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ となる。そうすると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{s} + a\right)}{g\left(\frac{1}{s} + a\right)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F(s)}{G(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F'(s)}{G'(s)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

となり示された。■