

## Leibniz の定理

積の  $n$  階微分の公式である Leibniz の定理を証明しよう。これは 2 項定理の証明と全く同様の方法で示される。

### ( Leibniz の定理 )

$f^{(n)}(x)$ ,  $g^{(n)}(x)$  が存在するとき

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

$n$  に関する数学的帰納法で示す。

$n = 1$  のときは、積の微分公式より正しい。

$n = m$  のとき正しいと仮定して、 $n = m + 1$  のときに考える。

帰納法の仮定から  $\{f(x)g(x)\}^{(m)} = \sum_{k=0}^m {}_m C_k f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x)$  であるから、この両辺を  $x$  で微

分すると

$$\begin{aligned} & \{f(x)g(x)\}^{(m+1)} \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k \{f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x)\}' \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k \{f^{(k+1)}(x)g^{(m-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x)\} \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k f^{(k+1)}(x)g^{(m-k)}(x) + \sum_{k=0}^m {}_m C_k f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x) \\ &= \{ {}_m C_0 f^{(1)}(x)g^{(m)}(x) + {}_m C_1 f^{(2)}(x)g^{(m-1)}(x) + \cdots + {}_m C_{m-1} f^{(m)}(x)g^{(1)}(x) + {}_m C_m f^{(m+1)}(x)g(x) \} \\ & \quad + \{ {}_m C_0 f(x)g^{(m+1)}(x) + {}_m C_1 f^{(1)}(x)g^{(m)}(x) + \cdots + {}_m C_{m-1} f^{(m-1)}(x)g^{(2)}(x) + {}_m C_m f^{(m)}(x)g^{(1)}(x) \} \\ &= {}_m C_0 f(x)g^{(m+1)}(x) + ({}_m C_0 + {}_m C_1) f^{(1)}(x)g^{(m)}(x) + ({}_m C_1 + {}_m C_2) f^{(2)}(x)g^{(m-1)}(x) + \cdots \\ & \quad \cdots \cdots + ({}_m C_{m-1} + {}_m C_m) f^{(m)}(x)g^{(1)}(x) + {}_m C_m f^{(m+1)}(x)g(x) \\ &= f(x)g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^m ({}_m C_{k-1} + {}_m C_k) f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x) + f^{(m+1)}(x)g(x) \end{aligned}$$

ここで

$${}_m C_{k-1} + {}_m C_k = {}_{m+1} C_k \quad \text{注1}$$

である。また  ${}_{m+1} C_0 = {}_{m+1} C_{m+1} = 1$  である。よって

$$\begin{aligned} & \{f(x)g(x)\}^{(m+1)} \\ &= f(x)g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^m {}_{m+1} C_k f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x) + f^{(m+1)}(x)g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1} C_k f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x) \end{aligned}$$

となり,  $n = m + 1$  のときも正しくなる。従って, 帰納法によって示された。■

---

注1  $m+1$  から  $k$  人を選ぶとき, A さんを含む選び方は, A さん以外の  $m$  人から残りの  $k-1$  人を選べばよいので  ${}_m C_{k-1}$  通りある。また, A さんを含まない選び方は  $k$  人とも A さん以外の  $m$  から選べばよいので  ${}_m C_k$  通りある。よって  ${}_{m+1} C_k = {}_m C_{k-1} + {}_m C_k$  である。