

Leibniz の定理

積の n 階微分の公式である Leibniz の定理を証明しよう。これは 2 項定理の証明と全く同様の方法で示される。

(Leibniz の定理)

$f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ が存在するとき

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

n に関する数学的帰納法で示す。

$n = 1$ のときは、積の微分公式より正しい。

$n = m$ のとき正しいと仮定して、 $n = m + 1$ のときに考える。

帰納法の仮定から $\{f(x)g(x)\}^{(m)} = \sum_{k=0}^m {}_m C_k f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x)$ であるから、この両辺を x で微

分すると

$$\begin{aligned} & \{f(x)g(x)\}^{(m+1)} \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k \{f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x)\}' \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k \{f^{(k+1)}(x)g^{(m-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x)\} \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k f^{(k+1)}(x)g^{(m-k)}(x) + \sum_{k=0}^m {}_m C_k f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x) \\ &= \{ {}_m C_0 f^{(1)}(x)g^{(m)}(x) + {}_m C_1 f^{(2)}(x)g^{(m-1)}(x) + \cdots + {}_m C_{m-1} f^{(m)}(x)g^{(1)}(x) + {}_m C_m f^{(m+1)}(x)g(x) \} \\ & \quad + \{ {}_m C_0 f(x)g^{(m+1)}(x) + {}_m C_1 f^{(1)}(x)g^{(m)}(x) + \cdots + {}_m C_{m-1} f^{(m-1)}(x)g^{(2)}(x) + {}_m C_m f^{(m)}(x)g^{(1)}(x) \} \\ &= {}_m C_0 f(x)g^{(m+1)}(x) + ({}_m C_0 + {}_m C_1) f^{(1)}(x)g^{(m)}(x) + ({}_m C_1 + {}_m C_2) f^{(2)}(x)g^{(m-1)}(x) + \cdots \\ & \quad \cdots \cdots + ({}_m C_{m-1} + {}_m C_m) f^{(m)}(x)g^{(1)}(x) + {}_m C_m f^{(m+1)}(x)g(x) \\ &= f(x)g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^m ({}_m C_{k-1} + {}_m C_k) f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x) + f^{(m+1)}(x)g(x) \end{aligned}$$

ここで

$${}_m C_{k-1} + {}_m C_k = {}_{m+1} C_k \quad \text{注1}$$

である。また ${}_{m+1} C_0 = {}_{m+1} C_{m+1} = 1$ である。よって

$$\begin{aligned} & \{f(x)g(x)\}^{(m+1)} \\ &= f(x)g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^m {}_{m+1} C_k f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x) + f^{(m+1)}(x)g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1} C_k f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x) \end{aligned}$$

となり, $n = m + 1$ のときも正しくなる。従って, 帰納法によって示された。■

注1 $m+1$ から k 人を選ぶとき, A さんを含む選び方は, A さん以外の m 人から残りの $k-1$ 人を選べばよいので ${}_m C_{k-1}$ 通りある。また, A さんを含まない選び方は k 人とも A さん以外の m から選べばよいので ${}_m C_k$ 通りある。よって ${}_{m+1} C_k = {}_m C_{k-1} + {}_m C_k$ である。