

曲線の長さ

曲線 $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ の長さを次のように定義する。

$\alpha \leq t \leq \beta$ を n 等分して $\alpha = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = \beta$ とする。そして $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ また $P_i(x_i, y_i)$ とおく。次に, 折れ線の長さの和 $\sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i$ の $n \rightarrow \infty$ とするときの極限值

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i$ を曲線 C の長さという。このとき次の定理が成り立つ。

定理 (parameter 表示された曲線の長さ)

曲線 C が parameter t を用いて $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ と表されているものとする。

$x = x(t)$, $y = y(t)$ は微分可能で, $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ は連続とする。

このとき C の長さ L は $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ である。

上に述べたように点 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ をとる。 $P_{i-1}P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ であるが, 平均値の定理を用いると

$$x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (t_{i-1} < \xi_i < t_i)$$

$$y_i - y_{i-1} = y(t_i) - y(t_{i-1}) = \dot{y}(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (t_{i-1} < \eta_i < t_i)$$

となる ξ_i, η_i が存在する。よって $P_{i-1}P_i = \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2}(t_i - t_{i-1})$ である。ところで

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2} - \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2} \right| \\ &= \left| \frac{\{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2\} - \{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2\}}{\sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2} + \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2}} \right| \\ &= \frac{\left| (\dot{y}(\eta_i))^2 - (\dot{y}(\xi_i))^2 \right|}{\sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2} + \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2}} \\ &= \frac{|\dot{y}(\eta_i) + \dot{y}(\xi_i)|}{\sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2} + \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2}} \cdot |\dot{y}(\eta_i) - \dot{y}(\xi_i)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{|\dot{y}(\eta_i)| + |\dot{y}(\xi_i)|}{\sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2} + \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2}} \cdot |\dot{y}(\eta_i) - \dot{y}(\xi_i)| \\ &\qquad \qquad \qquad \text{⤵ } |A + B| \leq |A| + |B| \\ &\leq \frac{|\dot{y}(\eta_i)| + |\dot{y}(\xi_i)|}{|\dot{y}(\eta_i)| + |\dot{y}(\xi_i)|} \cdot |\dot{y}(\eta_i) - \dot{y}(\xi_i)| \\ &\qquad \qquad \qquad \text{⤵ } \sqrt{A^2 + B^2} \geq \sqrt{B^2} = |B| \\ &= |\dot{y}(\eta_i) - \dot{y}(\xi_i)| \end{aligned}$$

となり

$$\left| \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2} - \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2} \right| \leq |\dot{y}(\eta_i) - \dot{y}(\xi_i)| \leq M_i - m_i \cdots 1$$

である。ここで M_i, m_i は、それぞれ $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ における $\dot{y}(t)$ の最大値・最小値である。 $M_i - m_i$ ($1 \leq i \leq n$) の最大値を δ_n とおく。そうすると、任意の i に対して $M_i - m_i \leq \delta_n$ であるから 1 より

$$\left| \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2} - \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2} \right| \leq \delta_n \quad (1 \leq i \leq n) \cdots 2$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2}(t_i - t_{i-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2}(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2}(t_i - t_{i-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left\{ \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2} - \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2} \right\} (t_i - t_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2} - \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2} \right| (t_i - t_{i-1}) \\ &\qquad \qquad \qquad \text{⤵ } \left| \sum_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \delta_n (t_i - t_{i-1}) \qquad \text{⤵ } 2 \text{より} \\ &= \delta_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= \delta_n (\beta - \alpha) \end{aligned}$$

となり

$$\left| \sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2}(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \delta_n(\beta - \alpha)$$

である。ここで $n \rightarrow \infty$ とすると、区間 $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ の幅は 0 に近づき、また $\dot{y}(t)$ は連続であるから $\delta_n \rightarrow 0$ となる。一方、定積分の定義から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\xi_i))^2}(t_i - t_{i-1}) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

である注¹。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

となり、示された。■

曲線 C が $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) と表されているときは、 $C : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ ($a \leq t \leq b$) と parameter 表示される。そしてこのとき $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = f'(t) = f'(x)$ である。よって、上の定理から

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

を得る。

注¹仮定から $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ は連続であるから、定積分は存在する。