

曲率と曲率円

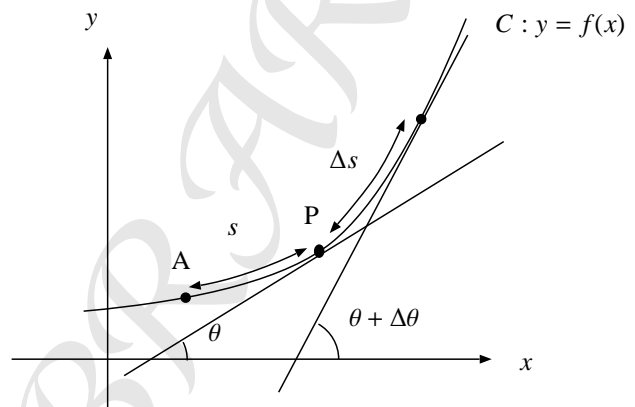
[1] 曲率と曲率半径

曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 P における曲線の曲がり具合を表す量として、 P における曲率 κ を次のように定義する。

A を C 上の定点とし、 $\widehat{AP} = s$ とおく。
 また P における接線と x 軸のなす角を θ とする。 s を Δs だけ変化させるときの θ の増分を $\Delta\theta$ とする。このとき

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

を P における C の曲率という。 κ が大きいということは、 Δs に対して $\Delta\theta$ の変化の割合が大きいということなので、 κ が大きい程曲がり具合が大きいということになる。とくに直線の曲率は 0 である。



曲率 κ を求めてみよう。

曲線 $C : y = f(x)$ 上の定点を $A(a, f(a))$ とし、また $P(x, f(x))$ とおく。

$s = \int_a^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$ であるから、 $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ である。一方、接線の傾きを考え

ると、 $\tan \theta = f'(x)$ であるから、個の両辺を x で微分すると、 $\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dx} = f''(x)$ となる

が、 $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + f'(x)^2$ であるから $\{1 + f'(x)^2\} \frac{d\theta}{dx} = f''(x)$ となる。よって

$\frac{d\theta}{dx} = \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2}$ である。そうすると

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{d\theta}{ds} \\ &= \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} \\ &= \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \\ &= \frac{f''(x)}{\{1 + f'(x)^2\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となり

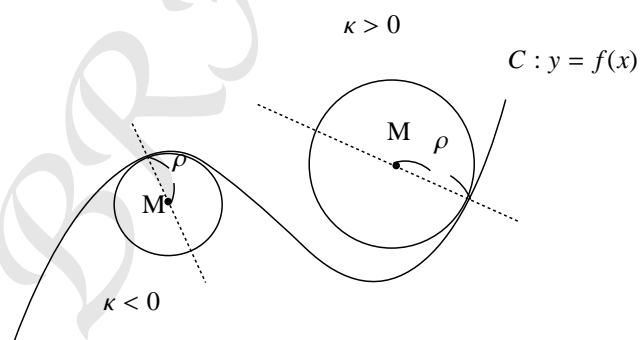
$$\kappa = \frac{f''(x)}{\{1 + f'(x)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

である。

κ が曲線 C 上の点 P における曲率であるとき, $\rho = \frac{1}{|\kappa|}$ を曲線 C の P における曲率半径という。また, P における法線上で曲線が凹となる側で $PM = \rho$ となる点を P における C の曲率中心という。そして中心が M で半径 ρ の円を曲率円という。

$$\rho = \frac{\{1 + f'(x)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

$f''(x) = 0$ のときは, P が線分上の点であったり, 変曲点であったり, いろいろな状況がありうるが, そのときは, 曲率 $\kappa = 0$, 曲率半径 $\rho = \infty$ と考える (つまり曲がっていない)。



[2] 接触円

曲線 $C : y = f(x)$ と, (a, b) を中心とする円 $K : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ が点 $P(p, q)$ を共有しているとする。 K の方程式を y について解いたもののうち P を含むものの方程式を $y = g(x)$ とする。このとき $f(p) = g(p)$ であるが, 更に

$$f'(p) = g'(p), \quad f''(p) = g''(p)$$

となるとき, K を C の P における接触円ということにする。
接触円を求めてみよう。

K の方程式を x で微分すると

$$2(x - a) + 2(y - b)y' = 0 \quad \text{つまり} \quad x - a + (y - b)y' = 0 \cdots 1$$

である 1 を更に x で微分すると

$$1 + (y')^2 + (y - a)y'' = 0 \cdots 2$$

である。

1 で $x = p$ とすると

$$p - a + \{g(p) - b\}g'(p) = 0 \cdots 3$$

2 で $x = p$ とすると

$$1 + g'(p)^2 + \{g(p) - b\}g''(p) = 0 \cdots 4$$

である。 3, 4 に $f(p) = g(p)$, $f'(p) = g'(p)$, $f''(p) = g''(p)$ を代入すると

$$p - a + \{f(p) - b\}f'(p) = 0 \cdots 5$$

$$1 + f'(p)^2 + \{f(p) - b\}f''(p) = 0 \cdots 6$$

5 より $f(p) - b = -\frac{p-a}{f'(p)}$ であるから, これを 6 へ代入すると

$$a = p - \frac{f'(p)\{1 + f'(p)^2\}}{f''(p)}$$

また, 6 より

$$b = f(p) + \frac{1 + f'(p)^2}{f''(p)}$$

更に, $P(p, f(p))$ が円 K 上にあることより, $(p - a)^2 + (f(p) - b)^2 = r^2$ であるから

$$\left(\frac{f'(p)\{1 + f'(p)^2\}}{f''(p)}\right)^2 + \left(\frac{1 + f'(p)^2}{f''(p)}\right)^2 = r^2 \quad \text{となり}$$

$$\frac{\{1 + f'(p)^2\}^3}{f''(p)^2} = r^2 \quad \text{よって}$$

$$r = \frac{\{1 + f'(p)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(p)|}$$

となる。従って, $r = \rho$ であるから r は曲率半径である。また, C と K は P における接線を共有しているから法線も共有し, 円の中心は法線上にある。また, $b = f(p) + \frac{1 + f'(p)^2}{f''(p)}$

であるから，中心は曲線 C の凹となる側にあることも分かる。従って，接触円は P における接触円であることが分かった。

接触円は，曲率円と一致し

$$\text{中心は } \left(p - \frac{f'(p)\{1 + f'(p)^2\}}{f''(p)}, f(p) + \frac{1 + f'(p)^2}{f''(p)} \right)$$

曲率中心 (a, b) の軌跡 Γ を $C : y = f(x)$ の縮閉線と言ひ， C を Γ の伸開線と言ふ。