

1 項別積分

区間 I 上で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ が

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすとき、 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I 上で一様収束すると言い

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

と書く。

[例] 一様収束なら各点収束であるが、逆は言えない。

$[0, 1]$ において $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ とおく。

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + nx} = 0$ であるから、 $f_n(x)$ は各点収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ である。

もし、 $\{f_n(x)\}$ が一様収束するなら、その極限は各点収束の極限と一致するので $f_n(x) \rightrightarrows 0$ となるはずである。しかし、 $0 < x \leq 1$ のとき $f_n(x) = \frac{n}{\frac{1}{x} + n^2x} \leq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ であるから

$x = \frac{1}{n}$ のとき $f_n(x)$ は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。よって $\sup |f_n(x) - 0| = \max |f_n(x)| = \frac{1}{2}$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - 0| \neq 0$ であり、 0 には一様収束しない。

(一様収束列の極限)

$[a, b]$ で連続な関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束すれば $f(x)$ も連続である。

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(x_0)| \\ &= \left| \{f(x) - f_n(x)\} + \{f_n(x) - f_n(x_0)\} + \{f_n(x_0) - f(x_0)\} \right| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分大きい n をとれば $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ とできる。このよ
うな n に対して、 $f_n(x)$ は $x = x_0$ で連続であるから、ある $\delta > 0$ をとって

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる。従って、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

となり、 $f(x)$ の連続性が示された。■

(項別積分)

$[a, b]$ で連続な関数列 $f_n(x)$ が定義されていて $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) とすると

$$\int_c^x f_n(t) dt \rightrightarrows \int_c^x f(t) dt \quad (n \rightarrow \infty)$$

但し、 $x, c \in [a, b]$ で、 c は一定とする。特に、 $x = b, c = a$ とすれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

である。

上の定理より $f(x)$ も連続であるから $\int_c^x f(t) dt$ が考えられる。

$$\left| \int_c^x f_n(t) dt - \int_c^x f(t) dt \right| \leq \int_c^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \sup_{t \in [c, x]} |f_n(t) - f(t)| \cdot |x - c| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot (b - a)$$

ここで $\sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot (b - a)$ は x とは無関係であるから $\sup_{x \in [a, b]}$ をとると、 $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$

より

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| \int_c^x f_n(t) dt - \int_c^x f(t) dt \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot (b - a) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。従って $\int_c^x f_n(t) dt \rightrightarrows \int_c^x f(t) dt$ となり示された。■

[例] $[0, 1]$ で

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2n}\right) \\ 4n^2 \left(\frac{1}{n} - x\right) & \left(\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases} \text{ と定義する。}$$

$x = 0$ のときは, $f_n(0) = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ である。

一方, $0 < x \leq 1$ のときは n を十分大きくすれば必ず $\frac{1}{n} < x$ となるので n が十分大きいときは, つねに $f_n(x) = 0$ である。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ となる。

従って $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ (各点収束) である。しかし, $\max f_n(x) = 2n$ であるから一様収束はしない。

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \left[2n^2 x^2 \right]_0^{\frac{1}{2n}} + \left[4n^2 \left(\frac{1}{n} x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_{\frac{1}{2n}}^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$ である。一方, $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$ であるから, 項別積分はできない。

[例] $[0, 1]$ で $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ とおくと, 一様収束しなかった。しかし

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \left[\frac{1}{2n} \log(1+n^2x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2n} \log(1+n^2) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。一方, $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$ である。従って, 一様収束しないが, 項別積分できる。

[注] 実は, $f_n(x)$ が一様に有界で, 積分可能な $f(x)$ に各点収束すれば, 項別積分できることが分かる。

項別積分の定理から, 項別微分の定理を得る。

(項別微分)

$f_n(x)$ が $[a, b]$ において C^1 級であって, $[a, b]$ で各点収束し, 更に $\{f'_n(x)\}$ が $[a, b]$ で一様収束するなら

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\}' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

である。

$[a, b]$ の各点で $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $f_n'(x) \Rightarrow g(x)$ とする。

$g(x)$ は $[a, b]$ で連続である。 $x \in [a, b]$ に対して $\int_a^x f_n'(t) dt = f_n(x) - f_n(a)$ である。ここで $n \rightarrow \infty$ とすると、仮定から項別積分が可能であり、また右辺は各点収束するから $\int_a^x g(t) dt = f(x) - f(a)$ となる。よって $g(x) = f'(x)$ つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\}'$ となり示された。■