

微積分学の基本定理・定積分と原始関数

連続関数の定積分を計算するとき、定義に従って極限値を求めることはほとんどない。原始関数を利用すれば、簡単に定積分の値を求めることが出来るのである。その方法を説明するために準備から始める。

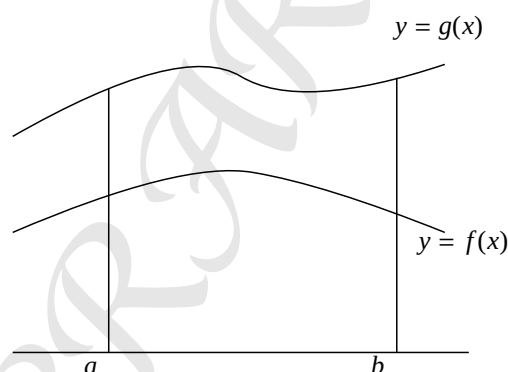
定積分は符号付き面積を表すのだから

$a \leq x \leq b$ においてつねに $f(x) \leq g(x)$ となっているとき 2 つの部分の符号付き面積を比較すると

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

となることが分かる。

しかも、この場合 $a \leq x \leq b$ においてピッタリと 2 つのグラフが重なっているとき以外は 2 つの部分の面積が決して一致しない。従って次を得た。



(定積分の単調性)

$a \leq b$ とする。 $f(x), g(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続で、つねに $f(x) \leq g(x)$ となっているとき

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

が成り立つ。ここで等号が成立するのは $a \leq x \leq b$ でつねに $f(x) = g(x)$ となる時のみである。

これを利用して定積分の平均値定理と呼ばれる定理を示そう。

(定積分の平均値定理)

$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ において連続のとき

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a) \quad (a < c < b)$$

となる c が存在する。

Case 1. $a \leq x \leq b$ において $f(x) = k$ (定数) のとき

定積分の定義によって $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b k dx = k(b-a) \cdots \textcircled{1}$ (つまり長方形の面積)

である。そこで例えば $c = \frac{a+b}{2}$ とおくと $a < c < b$ でありまた、 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ でつねに k という値をとることから $f(c) = k$ となる。よってこれを $\textcircled{1}$ に代入すると $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$ となり示された。

Case 2. $a \leq x \leq b$ において $f(x)$ が定数ではないとき

$f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続であるから、 $a \leq x \leq b$ で最大値・最小値をとる。最大値を M 、最小値を m とおくと、 $a \leq x \leq b$ でつねに $m \leq f(x) \leq M$ となるので、定積分の単調性から $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$ となる。また、 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で定数ではないので、つねに $f(x) = m$ となったり、つねに $f(x) = M$ となったりはしないので

$$\int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx \cdots \textcircled{2}$$

である。ここで m, M は定数であるから定積分の定義から

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx = M(b-a) \quad (\text{長方形の面積})$$

である。よってこれらを $\textcircled{2}$ に代入すると $m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a)$ つまり

$$m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < M \cdots \textcircled{3}$$

となる。

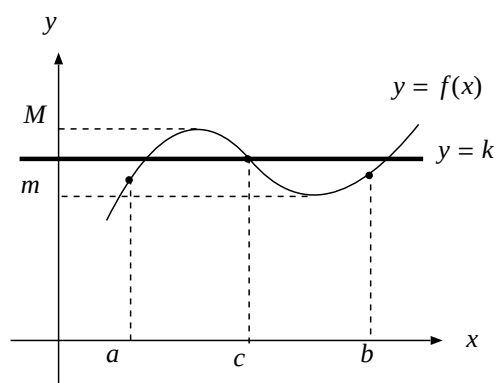
$$k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ とおけば } m < k < M$$

で、 m は $a \leq x \leq b$ での $f(x)$ の最小値、 M は $a \leq x \leq b$ での $f(x)$ の最大値であるから中間値の定理より $f(c) = k$ ($a < c < b$) となる c がある。

$$k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ で}$$

$$\text{あるから } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ つまり}$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \text{ となる。} \blacksquare$$



定積分の平均値定理を用いて「微積分学の基本定理」を示そう。

(微積分学の基本定理)

$f(x)$ は $\alpha \leq x \leq \beta$ で連続とし、 $\alpha < a < \beta$, $\alpha < x < \beta$ とする。

このとき $\int_a^x f(t) dt$ は x に関して微分可能で

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

となる。

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおく。 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ を計算しよう。

$$\begin{aligned} F(x+h) &= \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt && \text{定積分の区間加法性} \\ &= F(x) + \int_x^{x+h} f(t) dt && F(x) \text{ の定義} \end{aligned}$$

であるから $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt \cdots \textcircled{1}$ となる。ここで定積分の平均値定理を用いると

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} f(t) dt &= f(c)\{(x+h) - x\} \quad (c \text{ は } x \text{ と } x+h \text{ の間}) \\ \text{つまり } \int_x^{x+h} f(t) dt &= f(c)h \end{aligned}$$

と書ける。これを $\textcircled{1}$ に代入すると $F(x+h) - F(x) = f(c)h$ となるので、両辺を h で割ってから $h \rightarrow 0$ とすると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

ここで c は x と $x+h$ の間にあったので $h \rightarrow 0$ のとき $c \rightarrow x$ である。そして $f(t)$ は連続であるから $c \rightarrow x$ のとき $f(c) \rightarrow f(x)$ となる。よって $\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$ となるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \text{ である。つまり } F'(x) = f(x) \text{ である。} \blacksquare$$

定積分は原始関数を用いて計算できることを示そう。

(定積分の計算)

$f(x)$ は連続とし、 $F(x)$ を $f(x)$ の任意の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

である。

$G(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと、微積分学の基本定理より $G'(x) = f(x)$ である。つまり $G(x)$ も $f(x)$ の原始関数である。しかし原始関数は定数差を除いて一意的に決まるので^{注1} $G(x) = F(x) + C$ と書ける。よって

$$\int_a^b f(x) dx = G(b)$$

$$= G(b) - G(a)$$

$$= \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\}$$

$$= F(b) - F(a) \blacksquare$$

$$\Rightarrow G(a) = \int_a^a f(x) dx = 0 \text{ である}$$

$$\Rightarrow G(x) = F(x) + C \text{ であった}$$

以上で、定積分は原始関数を利用して計算できることが分かった。

^{注1} $G(x), F(x)$ をともに $f(x)$ の原始関数とする。 $H(x) = G(x) - F(x)$ とおくと

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

であるから、つねに $H'(x) = 0$ となり $H(x) = C$ (定数) である。よって $G(x) - F(x) = C$ つまり $G(x) = F(x) + C$ と書ける。