

実数について

1 実数の定義

集合 \mathbb{R} が次の「四則に関する性質」、「順序に関する性質」、「連続性に関する性質」の3つの性質を満たすとき \mathbb{R} を実数体と言い、 \mathbb{R} の要素を実数と呼ぶ。

(I) 四則に関する性質

\mathbb{R} には2つの演算「加法 $+$ 」と「乗法 \cdot 」が定義されていて次が成り立つ。

(1) 加法

- (a) 交換法則： $x + y = y + x$
- (b) 結合法則： $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (c) 単位元の存在：任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $x + 0 = x$ となる特別な要素 0 が存在する。
- (d) 逆元の存在：任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $x + (-x) = 0$ となる要素 $-x$ が存在する。

(2) 乗法

- (a) 交換法則： $x \cdot y = y \cdot x$
- (b) 結合法則： $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- (c) 単位元の存在：任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $1 \cdot x = x$ となる特別な要素 1 が存在する。
- (d) 逆元の存在： $0 \neq x \in \mathbb{R}$ に対して、 $x \cdot x^{-1} = 1$ となる要素 x^{-1} が存在する。
- (e) 分配法則： $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

なお、以下では乗法の「 \cdot 」を省略して $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$ と書くことにする。

(II) 順序に関する性質

\mathbb{R} の要素の間に関係「 \leq 」が定義されていて、 \mathbb{R} の任意の2つの要素 x, y に対し、 $x \leq y$ か $y \leq x$ のうち少なくとも一方が成り立っている。そして「 \leq 」は次を満たす。

- (1) $x \leq x$
- (2) $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$
- (3) $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$
- (4) $x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$
- (5) $x \leq y$ かつ $0 \leq z$ ならば $xz \leq yz$

$x \leq y$ かつ $x \neq y$ のとき $x < y$ と書くことにする。

また、 $x \leq y$ のとき $y \geq x$ と書く。

次に「連続性」について述べるのだが、その準備のために「切断」という言葉を定義する。

\mathbb{R} の部分集合 A, B が次の 3 条件を満たすとき (A, B) を \mathbb{R} の切断と言う。

- (1) $\mathbb{R} = A \cup B$
- (2) $A \cap B = \phi$ (空集合)
- (3) 任意の $a \in A$, 任意の $b \in B$ に対して $a < b$ である。

この「切断」を用いると、連続性は次のように述べられる。

(III) 連続性に関する性質

\mathbb{R} の任意の切断 (A, B) に対して、ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $a \in A$ に対し $a \leq x$, 任意の $b \in B$ に対して $x \leq b$ となる。

以上 (I), (II), (III) の 3 つの性質を満たす集合 \mathbb{R} のことを実数体と呼び、 \mathbb{R} の要素を実数と言う。

2 上限・下限

$A \subseteq \mathbb{R}$ とする。このとき、実数 m が A の上界であるとは、任意の $a \in A$ に対して $a \leq m$ が成り立つことである。また、実数 l が A の下界であるとは、任意の $a \in A$ に対して $a \geq l$ が成り立つことである。

A が上界をもつとき、 A は上に有界であると言い、下界をもつとき下に有界であると言う。

A が上に(下に)有界のとき、 A の上界(下界)は無数に存在するが、次が成り立つ。

定理 (最小上界)

$\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ とする。 A が上に有界のとき、 A の上界の全体を U とおく。

- (1) (U^c, U) は \mathbb{R} の切断である。但し、 U^c は U の補集合を表す。
- (2) U は最小値をもつ。

- (1) U^c は U の補集合であるから $\mathbb{R} = U^c \cup U, U^c \cap U = \phi$ となる。次に、 $x \in U^c, y \in U$ とする。 $x \notin U$ であるから x は A の上界ではない。よって $x < a$ となる $a \in A$ がある。ところが y は A の上界であるから $a \leq y$ である。よって $x < a \leq y$ となり $x < y$ である。従って (U^c, U) は \mathbb{R} の切断である。

(2) (U^c, U) は \mathbb{R} の切断であるから，実数の連続性より，ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x \leq m$ ，任意の $y \in U$ に対して $m \leq y$ となる。よって，もし m も A の上界であることが示されれば， m は U の最小値と分かる。そこで，以下 m が A の上界であることを示そう。

m は A の上界ではないと仮定する。そうすると $m \in U^c$ であるから m は U^c の最大の要素となる。また， m は上界ではないので $m < a$ となる $a \in A$ がある。そこで $b = \frac{m+a}{2}$ とおくと $m < b < a$ である。 $m < b$ であるから m の最大性から $b \notin U^c$ である。そうすると $b \in U$ となり， b は A の上界であるが，これは $b < a$ に反して矛盾である。■

全く同様にして，次も示される。

定理（最大下界）

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ とする。 A が下に有界のとき， A の下界の全体を L とおく。

- (1) (L^c, L) は \mathbb{R} の切断である。但し， U^c は U の補集合を表す。
- (2) L は最大値をもつ。

定理によって，上に有界な空でない集合 A の上界の中には最小となるものが存在するので，これを A の上限と言い $\sup A$ と書く。同様に，下に有界な空でない集合 A の下界の中には最大となるものが存在するので，これを A の下限と言い $\inf A$ と書く。

この言葉を使えば，上の定理は次のように言い表される。

定理（上限・下限）

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ とする。

- (1) A が上に有界ならば， A の上限が存在する。
- (2) A が下に有界ならば， A の下限が存在する。

3 有界単調数列の極限

数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるとは，ある実数 m が存在して，すべての番号 n に対して，つねに $a_n \leq m$ となることである。

同様に，下に有界であるとは，ある実数 m が存在して，すべての番号 n に対して，つねに $a_n \geq m$ となることである。

また， $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ が成り立つとき， $\{a_n\}$ は単調増加であると言い， $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ が成り立つとき， $\{a_n\}$ は単調減少であると言う。

有界単調数列は必ず収束することを証明しよう。

定理（有界単調数列の収束）

- (1) 上に有界な単調増加数列は，収束する。
- (2) 下に有界な単調減少数列は，収束する。

どちらも同様なので，(1) のみ示す。

$\{a_n\}$ を上に有界な単調増加数列とする。 $E = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ とおくと E は空でない，上に有界な集合であるから，前節の定理より上限 α が存在する。そこで，以下 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ となることを示す。

任意の $\varepsilon > 0$ をとる。

α は E の最小上界である。最小性から， $\alpha - \varepsilon$ はもはや上界ではないので $\alpha - \varepsilon < a_N$ となる番号 N がある。

そうすると， $\{a_n\}$ が単調増加であることより $N \leq n$ のとき $\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n$ となる。よって

$$n \geq N \text{ のときつねに } \alpha - \varepsilon < a_n \cdots 1$$

である。一方， α は上界であるから， $a_n \leq \alpha (< \alpha + \varepsilon)$ である。よって 1 とあわせると

$$n \geq N \text{ のときつねに } \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

つまり

$$n \geq N \text{ のときつねに } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となる。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ である。■

上の定理を用いて $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とおくととき，数列 $\{a_n\}$ が収束することを示そう。収束することを示すには $\{a_n\}$ が

(1) 上に有界であること

(2) 単調増加であること

の2つを言えばよい。

まず、2項定理によって

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

有界性

$$\begin{aligned}
 &1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
 &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \\
 &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} \quad \text{☞ 分母を小さくした} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
 &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 3
 \end{aligned}$$

となるので n によらず、つねに $a_n \leq 3$ となるので、 $\{a_n\}$ は上に有界である。

単調性

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} - a_n \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\
&\quad - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right\}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > 0 \\
& \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) > 0
\end{aligned}$$

であるから $a_{n+1} - a_n > 0$ つまり $a_{n+1} > a_n$ となり単調増加である。以上で示された。■