

陰関数定理と逆写像定理

1 陰関数定理

$f(x, y)$ の第 r 階導関数がすべて存在して連続のとき, $f(x, y)$ は C^r 級であるという。
次の定理を証明しよう。

(陰関数定理)

$f(x, y)$ が点 (a, b) の近傍で C^r ($r \geq 1$) 級で

$$f(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) \neq 0$$

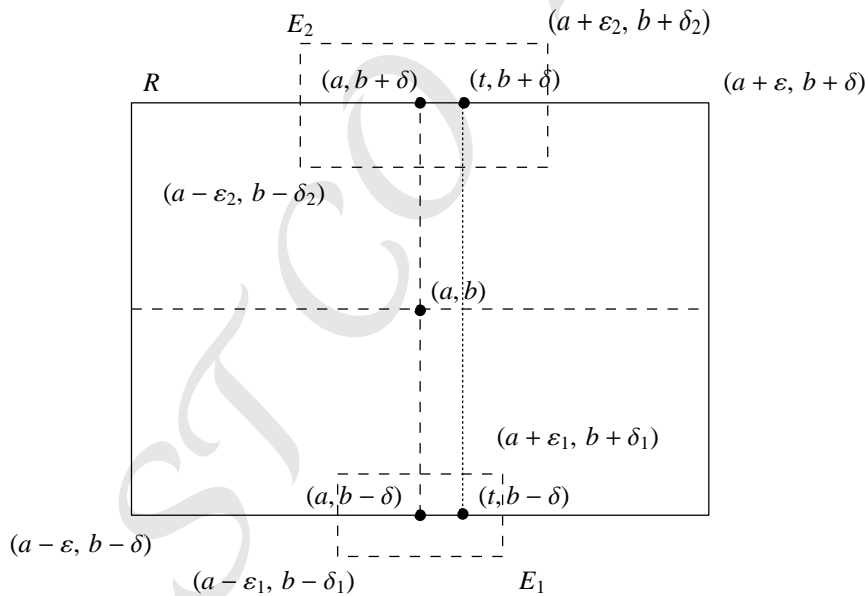
ならば, a を含むある开区間において

$$f(x, g(x)) = 0, \quad b = g(a)$$

となる C^r 級の関数 $y = g(x)$ がただひとつ存在する。このとき, $g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$ となる。

$f_y(a, b) < 0$ のときは, $-f(x, y)$ を考えればよいから, $f_y(a, b) > 0$ のときに考える。

$g(x)$ の存在



$f_y(x, y)$ は連続であるから, (a, b) の十分小さい近傍では, つねに $f_y(x, y) > 0$ である。そこで, この近傍に含まれる閉長方形

$$R = \left\{ (x, y) \mid a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon, b - \delta \leq y \leq b + \delta \right\}$$

をとると R では, つねに $f_y(x, y) > 0$ である。よって, R においては $f(x, y)$ を y の関数と見るとき単調増加である。従って, $f(a, b) = 0$ より

$$f(a, b - \delta) < 0, \quad f(a, b + \delta) > 0$$

となる。

$f(x, y)$ の連続性より, $(a, b - \delta)$ の十分近くでは, つねに $f(x, y) < 0$ であり, $(a, b + \delta)$ の十分近くでは, つねに $f(x, y) > 0$ である。よって, 十分小さい長方形

$$E_1 = \left\{ (x, y) \mid a - \varepsilon_1 < x < a + \varepsilon_1, b - \delta - \delta_1 < y < b - \delta + \delta_1 \right\}$$

$$E_2 = \left\{ (x, y) \mid a - \varepsilon_2 < x < a + \varepsilon_2, b + \delta - \delta_2 < y < b + \delta + \delta_2 \right\}$$

をとれば, E_1 においてはつねに $f(x, y) < 0$, E_2 においてはつねに $f(x, y) > 0$ となる。

そこで, $\xi = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ とおく。そうすると $x = t$ ($a - \xi < t < a + \xi$) と固定して考えると

$$f(t, b - \delta) < 0, \quad f(t, b + \delta) > 0$$

であるから, 連続関数の中間値の定理より $f(t, s) = 0$ となる s ($b - \delta < s < b + \delta$) がある。また, y の関数 $f(t, y)$ は単調増加であるから, このような s はただひとつに決まる。

そこで, t ($a - \xi < t < a + \xi$) に対して, このような s を対応させる関数を $s = g(t)$ ($a - \xi < t < a + \xi$) とおく。 $y = g(x)$ ($a - \xi < x < a + \xi$) とすると, 作り方から

$$f(x, g(x)) = 0, \quad g(a) = b$$

となる。

$g(x)$ の微分可能性

$y = g(x)$ ($a - \xi < x < a + \xi$) において, x の増分 Δx に対する y の増分を $\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x)$ とおく。但し, $x + \Delta x \in (a - \xi, a + \xi)$ とする。 $f(x, y)$ に対する平均値の定理より

$$f(x + \Delta x, y + \Delta) - f(x, y) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \quad (0 < \theta < 1)$$

である。ここで $y + \Delta y = g(x) + \{g(x + \Delta x) - g(x)\} = g(x + \Delta)$ であるから

$$f(x + \Delta x, y + \Delta) = f(x + \Delta x, g(x + \Delta)) = 0$$

となる。また

$$f(x, y) = f(x, g(x)) = 0$$

である。よって

$$\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) = 0$$

つまり

$$f_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta y = -f_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta x$$

ここで、有界閉領域 R において $f_y(x, y) \neq 0$ であり、 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ は連続であるから、

$$\left| \frac{f_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{f_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)} \right| \leq M \text{ となる定数 } M \text{ がある (有界)。よって}$$

$$|\Delta y| = \left| -\frac{f_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{f_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)} \right| |\Delta x| \leq M |\Delta x| \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

となる。そうすると、 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ の連続性より

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{f_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

となる。後は、

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{\left(f_{xx} + f_{xy} \frac{dy}{dx}\right) f_y - f_x \left(f_{yx} + f_{yy} \frac{dy}{dx}\right)}{f_y^2} \\ &= \frac{\left\{f_{xx} + f_{xy} \left(-\frac{f_x}{f_y}\right)\right\} f_y - f_x \left\{f_{yx} + f_{yy} \left(-\frac{f_x}{f_y}\right)\right\}}{f_y^2} \quad \leftarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \text{ を代入} \\ &= -\frac{f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^3} \end{aligned}$$

のように連鎖律を用いて微分すればよい。

$g(x)$ の一意性

$x = a$ の十分近くで $y = g(x)$, $y = h(x)$ がともに

$$f(x, g(x)) = 0, \quad b = g(a), \quad f(x, h(x)) = 0, \quad b = h(a)$$

を満たすとする。平均値の定理より

$$0 = f(x, g(x)) - f(x, h(x)) = f_y(x, y + \theta(g(x) - h(x)))(g(x) - h(x)) \quad (0 < \theta < 1)$$

なる θ がある。 $x = a$ の十分小さな近傍で考えているので、 $(x, y + \theta(g(x) - h(x))) \in R$ としてよいから、 $f_y(x, y + \theta(g(x) - h(x))) > 0$ である。 そうすると $g(x) = h(x)$ となり示された。 ■

[注] 上の定理と全く同様にして、次を示すことができる。

(系1)

$f(x_1, \dots, x_n, y)$ が点 (a_1, \dots, a_n, b) の近傍で C^r ($r \geq 1$) 級で

$$f(a_1, \dots, a_n, b) = 0, \quad f_y(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$$

ならば、点 (a_1, \dots, a_n, b) のある近傍で

$$f(x_1, \dots, x_n, y, g(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad g(a_1, \dots, a_n) = b$$

となる C^r 級の関数 $y = g(x_1, \dots, x_n)$ がただひとつ存在する。このとき

$$g_{x_j}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{f_{x_j}(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))}{f_y(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

上の定理の証明において、 a を (a_1, \dots, a_n) に置き換え、 R を

$$R = \left\{ (x_1, \dots, x_n, y) \mid a_1 - \varepsilon_1 \leq x_1 \leq a_1 + \varepsilon_1, \dots, a_n - \varepsilon_n \leq x_n \leq a_n + \varepsilon_n, b - \delta \leq y \leq b + \delta \right\}$$

に置き換える。開区間 $(a - \xi, a + \xi)$ を

$$I = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid a_i - \xi_i < x_i < a_i + \xi_i, \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

に置き換えれば $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の存在が示される。

微分可能性の証明では、平均値の定理

$$\begin{aligned} & f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n, y + \Delta y) - f(x_1, \dots, x_n, y_n) \\ &= \sum_{j=1}^n f_{x_j}(x_1 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n + \theta \Delta x_n, y + \theta \Delta y) \Delta x_j \\ & \quad + f_y(x_1 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n + \theta \Delta x_n, y + \theta \Delta y) \Delta y \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

を用いればよい。一意性はそのまま通用する。 ■

(系2)

$f(x, y, u, v), g(x, y, u, v)$ が (a, b, c, d) の近傍において C^r ($r \geq 1$) 級で

$$f(a, b, c, d) = 0, \quad g(a, b, c, d) = 0, \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}(a, b, c, d) \neq 0$$

ならば, (a, b) の近傍で

$$\begin{cases} f(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0 \\ g(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi(a, b) = c \\ \psi(a, b) = d \end{cases}$$

となる C^r 級の関数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ がただ 1 組存在する。そして, $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ の偏導関数は次のようになる。

$$\varphi_x = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}, \quad \varphi_y = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}$$

$$\psi_x = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, x)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}, \quad \psi_y = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, y)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}$$

 $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ の存在

$\det \begin{pmatrix} f_u(a, b, c, d) & f_v(a, b, c, d) \\ g_u(a, b, c, d) & g_v(a, b, c, d) \end{pmatrix} \neq 0$ より, 例えば $f_v(a, b, c, d) \neq 0$

よって, 上の定理より

$$\begin{aligned} f(x, y, u, h(x, y, u)) &= 0 && \dots 1 \\ h(a, b, c) &= d && \dots 2 \\ h_u(x, y, u) &= -\frac{f_u(x, y, u, h(x, y, u))}{f_v(x, y, u, h(x, y, u))} && \dots 3 \end{aligned}$$

となる $h(x, y, u)$ がある。

$G(x, y, u) = g(x, y, u, h(x, y, u))$ とおくと 2 より $G(a, b, c) = g(a, b, c, d) = 0$ である。また,

$$G_u(a, b, c) = g_u(a, b, c, d) + g_v(a, b, c, d)h_u(a, b, c)$$

$$= g_u(a, b, c, d) - g_v(a, b, c, d) \cdot \frac{f_u(a, b, c, d)}{f_v(a, b, c, d)} \quad \text{👉 3 を代入}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_v(a, b, c, d)g_u(a, b, c, d) - f_u(a, b, c, d)g_v(a, b, c, d)}{f_v(a, b, c, d)} \\
&= -\frac{1}{f_v(a, b, c, d)} \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \neq 0
\end{aligned}$$

よって, 定理より, $G(x, y, k(x, y)) = 0$, $k(a, b) = c$ つまり

$$g(x, y, k(x, y), h(x, y, k(x, y))) = 0, k(a, b) = c$$

となる $k(x, y)$ がある。1 において $u = k(x, y)$ を代入すれば

$$f(x, y, k(x, y), h(x, y, k(x, y))) = 0$$

以上より, $\varphi(x, y) = k(x, y)$, $\psi(x, y) = h(x, y, k(x, y))$ とおくと

$$\begin{aligned}
f(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) &= 0, g(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0 \\
\varphi(a, b) &= c, \psi(a, b) = d
\end{aligned}$$

となる。

$\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ の微分可能性

x, y の増分 Δx , Δy に関する u, v の増分をそれぞれ Δu , Δv とすると平均値の定理より

$$\begin{aligned}
&f(x + \Delta x, y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v) - f(x, y, u, v) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v)\Delta x \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v)\Delta y \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial u}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v)\Delta u \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial v}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v)\Delta v \quad (0 < \theta < 1)
\end{aligned}$$

と書ける。ここで, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ であり,
 $\Delta u = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y) = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - u$ であるから,

$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 。同様に, $v + \Delta v = \psi(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 。よって

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x, y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v) \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y), \psi(x + \Delta x, y + \Delta y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} & f(x, y, u, v) \\ &= f(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v)\Delta x \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v)\Delta y \\ &+ \frac{\partial f}{\partial u}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v)\Delta u \\ &+ \frac{\partial f}{\partial v}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v)\Delta v = 0 \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g}{\partial x}(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v)\Delta x \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v)\Delta y \\ &+ \frac{\partial g}{\partial u}(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v)\Delta u \\ &+ \frac{\partial g}{\partial v}(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v)\Delta v = 0 \quad (0 < \eta < 1) \end{aligned}$$

$\Delta y = 0$ のとき

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f_u(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) & f_v(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \\ g_u(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) & g_v(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \\ &= -\Delta x \begin{pmatrix} f_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \\ g_x(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, $(a, b, c, d) = (a, b, \varphi(a, b), \psi(a, b))$ において $\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \neq 0$ であるから, 偏導関数の連続性より $(x, y) = (a, b)$ の十分近くでは

$$\det \begin{pmatrix} f_u(x + \Delta x, y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v) & f_v(x + \Delta x, y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v) \\ g_u(x + \Delta x, y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v) & g_v(x + \Delta x, y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v) \end{pmatrix} \neq 0$$

である。よって

$$\Delta u = -\Delta x \frac{\det \begin{pmatrix} f_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) & f_v(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \\ g_x(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) & g_v(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} f_u(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) & f_v(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \\ g_u(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) & g_v(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) \end{pmatrix}}$$

更に, 連続性より (a, b) の十分近くの有界閉領域においては

$$\frac{\det \begin{pmatrix} f_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) & f_v(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \\ g_x(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) & g_v(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} f_u(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) & f_v(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \\ g_u(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) & g_v(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) \end{pmatrix}}$$

は有界であるから, $|\Delta u| \leq M|\Delta x|$ となる定数 M が存在するので $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ となる。同様に $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta v \rightarrow 0$ となる。よって

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\det \begin{pmatrix} f_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) & f_v(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \\ g_x(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) & g_v(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} f_u(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) & f_v(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u, v + \theta\Delta v) \\ g_u(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) & g_v(x + \eta\Delta x, y + \eta\Delta y, u + \eta\Delta u, v + \eta\Delta v) \end{pmatrix}} \\ &= - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} \end{aligned}$$

となり, $\varphi_x(x, y) = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}$ である。 $\varphi_y(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y)$ についても同様である。

後は, 連鎖律を用いて順次微分すれば C^r 級であることが分かる。

一意性

$u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ と $\tilde{u} = \tilde{\varphi}(x, y)$, $\tilde{v} = \tilde{\psi}(x, y)$ の 2 組があったとする。

$$f(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0, \quad f(x, y, \tilde{\varphi}(x, y), \tilde{\psi}(x, y)) = 0$$

(a, b) の十分近くで考える。平均値の定理より

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y, u, v) - f(x, y, \tilde{u}, \tilde{v}) \\ &= f_u(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) \cdot (u - \tilde{u}) \\ &\quad + f_v(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) \cdot (v - \tilde{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= g(x, y, u, v) - g(x, y, \tilde{u}, \tilde{v}) \\ &= g_u(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) \cdot (u - \tilde{u}) \\ &\quad + g_v(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) \cdot (v - \tilde{v}) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} f_u(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) & f_v(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) \\ g_u(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) & g_v(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \tilde{u} \\ v - \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}(a, b, c, d) \neq 0$ であるから, 連続性より (a, b, c, d) の十分近くでつねに

$$\det \begin{pmatrix} f_u(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) & f_v(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) \\ g_u(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) & g_v(x, y, \tilde{u} + \theta(u - \tilde{u}), \tilde{v} + \theta(v - \tilde{v})) \end{pmatrix} \neq 0$$

である。よって, (a, b) の十分近くで $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ となる。■

2 逆写像定理

(u, v) から (x, y) への対応があるとき, これの逆の対応の存在に関する定理を示そう。

(逆写像定理)

点 (c, d) の近傍で, C^r ($r \geq 1$) 級の関数 $f(u, v), g(u, v)$ があって

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}, \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}(c, d) \neq 0$$

ならば, $(f(c, d), g(c, d))$ の近傍で,

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \\ y = g(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \end{cases}$$

となる C^r 級の関数 $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ が, ただひと組だけ存在する。

$(a, b) = (f(c, d), g(c, d))$ とし

$$F(x, y, u, v) = f(u, v) - x, \quad G(x, y, u, v) = g(u, v) - y$$

とおくと, F, G は C^r 級で, $F(a, b, c, d) = 0, G(a, b, c, d) = 0$ である。また

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f_u(u, v), \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f_v(u, v)$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = g_u(u, v), \quad \frac{\partial G}{\partial v} = g_v(u, v)$$

であるから, $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}$ である。従って, 仮定から $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(a, b, c, d) \neq 0$ となる。よって (系 2) より (a, b) の近傍で

$$\begin{cases} F(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0 \\ G(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(a, b) = c \\ \psi(a, b) = d \end{cases}$$

となる C^r 級関数 $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ がただひと組存在する。このとき

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = x \\ g(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = y \end{cases}$$

となり示された。■