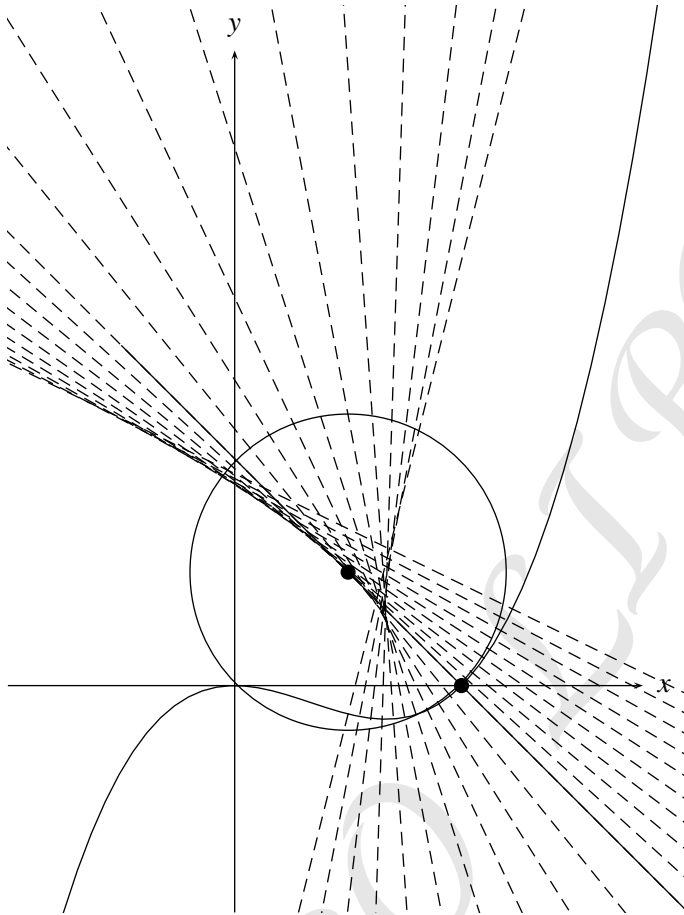


法線と曲率円

(法線の交点の極限と曲率円)

$y = f(x)$ の $x = a$ における法線を l_a , $x = b$ における法線を l_b とし, l_a と l_b の交点を $P(b)(x(b), y(b))$ とするとき, $\lim_{b \rightarrow a} P(b)$ は $x = a$ における $y = f(x)$ の曲率円の中心になる。



A を曲線 $y = f(x)$ 上の定点とし, P を $y = f(x)$ 上の点とすると, $s = \widehat{AP}$ とし, P における $y = f(x)$ の接線と x 軸のなす角を θ とすると,

$$\text{曲率は } \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{f''(x)}{1+f'(x)^2}}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \frac{f''(x)}{\{1+f'(x)^2\}^{\frac{3}{2}}} \text{ であるから, 曲率半径は } \frac{\{1+f'(x)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

また $x = a$ における, 曲線 $y = f(x)$ の凹側へ向かう, 法線の方法ベクトルは $\begin{pmatrix} -f'(a) \\ 1 \end{pmatrix}$

であるから，曲率中心の位置ベクトルは

$$\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} + \frac{\{1 + f'(a)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(a)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f'(a)^2}} \begin{pmatrix} -f'(a) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)} \begin{pmatrix} -f'(a) \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，曲率中心は $\left(a - \frac{f'(a) + f'(a)^3}{f''(a)}, f(a) + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)}\right)$ である。

一方，法線の交点を考える。

$$l_a : y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

$$l_b : y = -\frac{1}{f'(b)}(x - b) + f(b)$$

交点の x 座標は

$$x(b) = \frac{\frac{b}{f'(b)} - \frac{a}{f'(a)} + f(b) - f(a)}{\frac{1}{f'(b)} - \frac{1}{f'(a)}}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow a} x(b) &= \lim_{b \rightarrow a} \frac{\frac{b}{f'(b)} - \frac{a}{f'(a)} + f(b) - f(a)}{\frac{1}{f'(b)} - \frac{1}{f'(a)}} \\ &= \frac{\frac{f'(a) - af''(a)}{f'(a)^2} + f'(a)}{-\frac{f''(a)}{f'(a)^2}} \\ &= -\frac{f'(a) - af''(a) + f'(a)^3}{f''(a)} \\ &= a - \frac{f'(a) + f'(a)^3}{f''(a)} \end{aligned}$$

また， $y(b) = -\frac{1}{f'(a)}(x(b) - a) + f(a)$ であるから

$$\lim_{b \rightarrow a} y(b) = -\frac{1}{f'(a)} \left(-\frac{f'(a) + f'(a)^3}{f''(a)} \right) + f(a) = f(a) + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)}$$

従って $\lim_{b \rightarrow a} (x(b), y(b))$ は曲率中心である。■

$y = f(x)$ の曲率中心の軌跡を縮閉線, $y = f(x)$ を伸開線という。次を示そう。

(法線と縮閉線)

$y = f(x)$ の法線群の包絡線は, 縮閉線 (つまり, 曲率中心の軌跡) である。

$x = t$ における $y = f(x)$ の法線 C_t は $\left(\frac{1}{f'(t)} \right)$ に垂直であるから, 法線の方程式は

$$1 \cdot (x - t) + f'(t)(y - f(t)) = 0 \cdots 1$$

である。1 を t で偏微分すると

$$-1 + f''(t)(y - f(t)) - f'(t)f''(t) = 0 \cdots 2$$

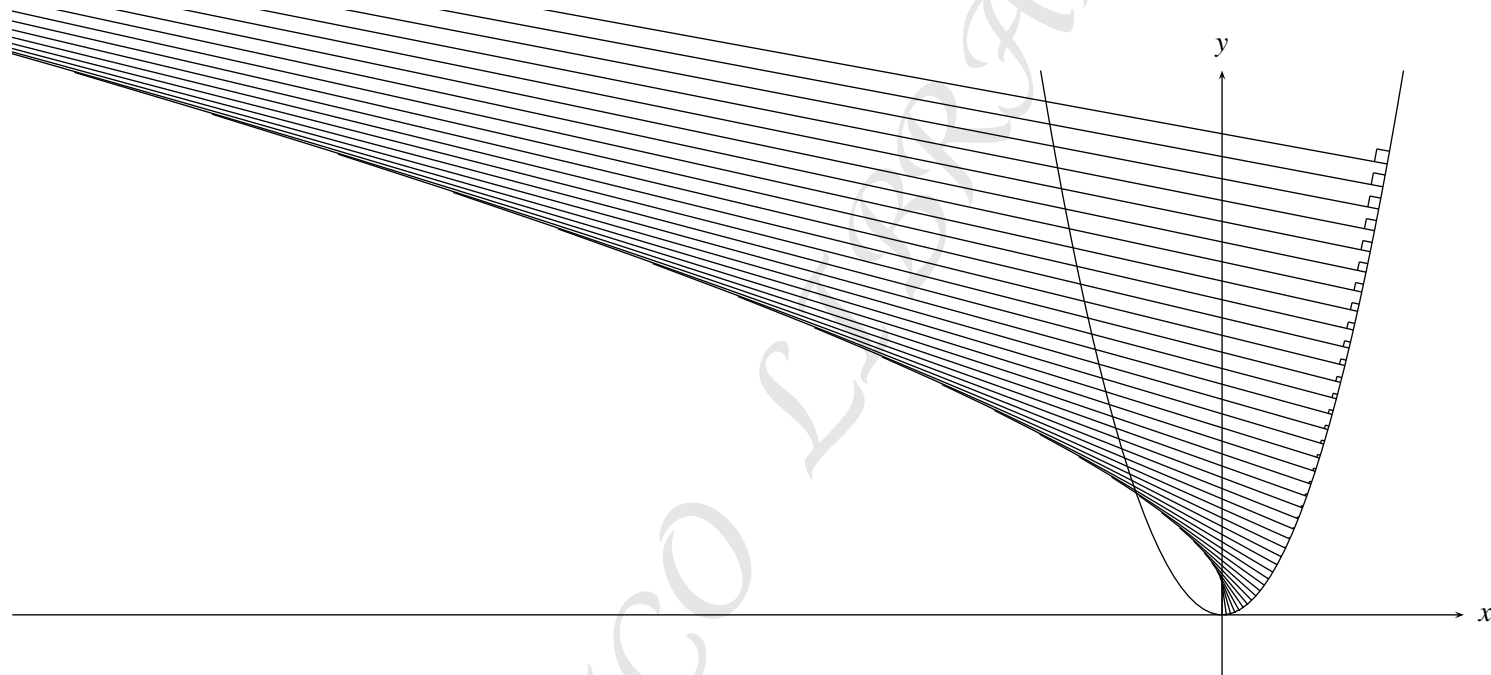
となる。 C_t は直線であるから特異点をもたず, 従って 1, 2 を連立して解いた

$$x = t - \frac{f'(t) + f'(t)^3}{f''(t)}, \quad y = f(t) + \frac{1 + f'(t)^2}{f''(t)}$$

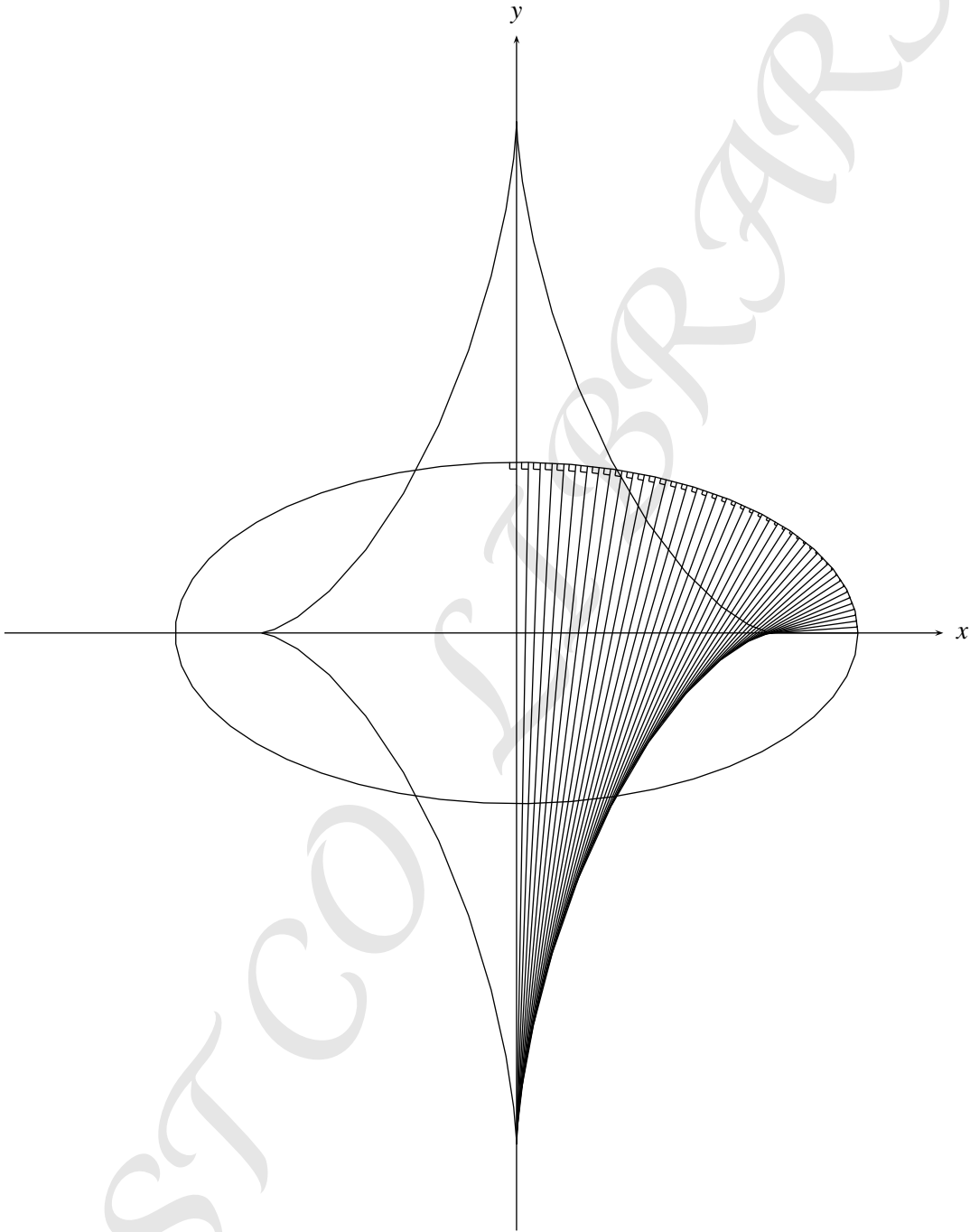
が包絡線である。しかし, これは $x = t$ における $y = f(x)$ の曲率中心の座標に他ならない。

従って, 包絡線 $\begin{cases} x = t - \frac{f'(t) + f'(t)^3}{f''(t)} \\ y = f(t) + \frac{1 + f'(t)^2}{f''(t)} \end{cases}$ は曲率中心の軌跡つまり縮閉線である。■

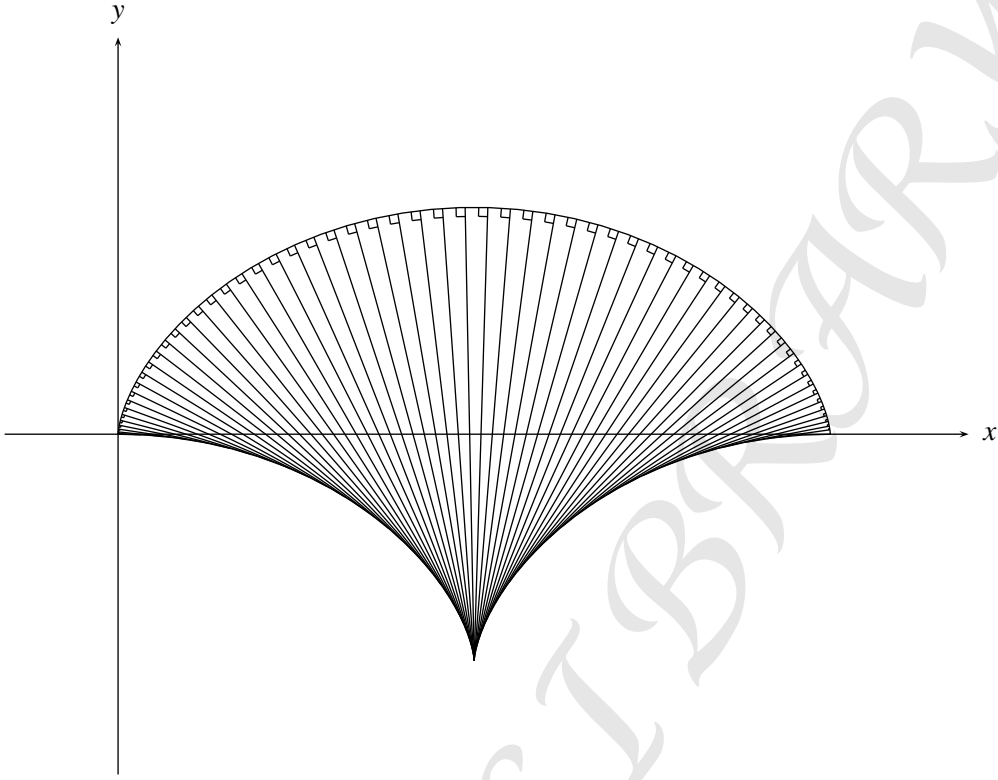
放物線 $y = x^2$ の法線群と縮閉線



楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の法線群と縮閉線



cycloid の法線群と縮閉線



[注] (包絡線)

xy 平面上の曲線群 $C_t : y = f(x, t)$ を考える。曲線 E が曲線群 $\{C_t\}$ の包絡線であるとは、

(i) E はすべての C_t に接する

(ii) E のどの点もあるひとつの C_t との接点である

となることである。

一般に、包絡線は存在しないかも知れないが、

$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ なる曲線 $E : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ が、包絡線なら

$$y(t) = f(x(t), t), \quad f_t(x(t), t) = 0$$

を満たさねばならないことを大雑把に示す。

$(x(t), y(t))$ で E と C_t が接線を共有するとする。

$(x(t), y(t))$ は C_t 上の点であるから $y(t) = f(x(t), t) \cdots 1$

また、 $x = x(t)$ における $y = f(x, t)$ の接線は $\begin{pmatrix} 1 \\ f_x(x(t), t) \end{pmatrix}$ に平行であり、 $E : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

の接線は $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ に平行であるから $y'(t) = f_x(x(t), t)x'(t) \cdots 2$ である。

1 の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), t+h) - f(x(t), t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), t+h) - f(x(t), t+h) + f(x(t), t+h) - f(x(t), t)}{h} \\ &= f_x(x(t), t)x'(t) + f_t(x(t), t) \end{aligned}$$

である。ここへ 2 を代入すると

$$f_x(x(t), t)x'(t) = f_x(x(t), t)x'(t) + f_t(x(t), t) \quad \text{つまり} \quad f_t(x(t), t) = 0$$

となる。■

曲線 $E : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ が上の条件を満たしても必ずしも包絡線とは限らない。

[例] 直線群 $C_t : y = f(x, t) = tx + t^2$ の包絡線を求める。
 $f_t(x, t) = x + 2t$ であるから

$$y = tx + t^2 \cdots 1 \quad x + 2t = 0 \cdots 2$$

2 より $x = -2t$ を 1 に代入して $y = -t^2$ となる。これより t を消去して $y = -\frac{x^2}{4}$ となる。

