

## 曲線群 $C_t : y = f(x, t)$ の包絡線について

$xy$  平面上の曲線群  $C_t : y = f(x, t)$  を考える。曲線  $E$  が曲線群  $\{C_t\}$  の包絡線であるとは、

(i)  $E$  はすべての  $C_t$  に接する

(ii)  $E$  のどの点もあるひとつの  $C_t$  との接点である

となることである。

一般に、包絡線は存在しないかも知れないが、

$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$  なる曲線  $E : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  が、包絡線なら

$$y(t) = f(x(t), t), \quad f_t(x(t), t) = 0$$

を満たさねばならないことを大雑把に示す。

$(x(t), y(t))$  で  $E$  と  $C_t$  が接線を共有するとする。

$(x(t), y(t))$  は  $C_t$  上の点であるから  $y(t) = f(x(t), t) \cdots 1$

また、 $x = x(t)$  における  $y = f(x, t)$  の接線は  $\begin{pmatrix} 1 \\ f_x(x(t), t) \end{pmatrix}$  に平行であり、 $E : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

の接線は  $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$  に平行であるから  $y'(t) = f_x(x(t), t)x'(t) \cdots 2$  である。

1 の両辺を  $t$  で微分すると

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), t+h) - f(x(t), t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), t+h) - f(x(t), t+h) + f(x(t), t+h) - f(x(t), t)}{h} \\ &= f_x(x(t), t)x'(t) + f_t(x(t), t) \end{aligned}$$

である。ここへ 2 を代入すると

$$f_x(x(t), t)x'(t) = f_x(x(t), t)x'(t) + f_t(x(t), t) \quad \text{つまり} \quad f_t(x(t), t) = 0$$

となる。■

曲線  $E : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  が上の条件を満たしても必ずしも包絡線とは限らない。

[例] 直線群  $C_t : y = f(x, t) = tx + t^2$  の包絡線を求める。  
 $f_t(x, t) = x + 2t$  であるから

$$y = tx + t^2 \cdots 1 \quad x + 2t = 0 \cdots 2$$

2 より  $x = -2t$  を 1 に代入して  $y = -t^2$  となる。これより  $t$  を消去して  $y = -\frac{x^2}{4}$  となる。

