

(はさみうちの原理)

ある区間 I において, つねに $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ であるとする。このとき $a \in I$ なる a に対して

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$$

である。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ があって

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |h(x) - A| < \varepsilon$$

となる。従って $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと

$$0 < |x - a| < \delta \implies \begin{cases} |f(x) - A| < \varepsilon & \text{つまり } A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \\ \text{かつ} \\ |h(x) - A| < \varepsilon & \text{つまり } A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon \end{cases}$$

となる。よって $0 < |x - a| < \delta$ のとき

$$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$$

となるので

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \quad \text{つまり} \quad 0 < |g(x) - A| < \varepsilon$$

となる。以上で

$$0 < |x - a| < \delta \implies 0 < |g(x) - A| < \varepsilon$$

であるから $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ である。■