

合成微分の公式の証明

(合成微分の公式)

$y = f(t)$, $t = g(x)$ をそれぞれ微分可能とする。このとき $y = f(g(x))$ であるから y を x の関数と見ることができるが, y は x の関数として微分可能であって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \quad \text{つまり} \quad \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

が成り立つ。

$k = g(x+h) - g(x)$ とおき

$$\varphi(k) = \begin{cases} \frac{f(t+k) - f(t)}{k} - f'(t) & (k \neq 0) \\ 0 & (k = 0) \end{cases}$$

とする。そうすると $k = 0$ のときも $k \neq 0$ のときも

$$f(t+k) - f(t) = \{f'(t) + \varphi(k)\}k \cdots 1$$

が成り立つ。ここで $t = g(x)$, $k = g(x+h) - g(x)$ であるから, 1 の左辺は

$$f(t+k) - f(t) = f(g(x) + g(x+h) - g(x)) - f(g(x)) = f(g(x+h)) - f(g(x))$$

となる。また右辺は

$$\{f'(t) + \varphi(k)\}k = \{f'(g(x)) + \varphi(k)\}\{g(x+h) - g(x)\}$$

である。よって 1 は

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = \{f'(g(x)) + \varphi(k)\}\{g(x+h) - g(x)\} \cdots 2$$

となる。この両辺を h で割ると

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \{f'(g(x)) + \varphi(k)\} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdots 3$$

である。ところで $g(x)$ は微分可能なので連続である。よって $\lim_{h \rightarrow 0} \{g(x+h) - g(x)\} = 0$ となり $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ と分かる。また $f(x)$ は微分可能なので $\varphi(k)$ の定義から $\lim_{k \rightarrow 0} \varphi(k) = f'(t) - f'(t) = 0$ となる。よって 3 において $h \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \{f'(g(x)) + \varphi(k)\} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

となり示された。■