

連続関数の中間値定理

まず、「関数の連続性」の厳密な定義から始めよう。

定義（関数の連続性）

$x = a$ の近くで定義された関数 $f(x)$ が $x = a$ において連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta \text{ のときつねに } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

となることである。

定義より次が分かる。

連続関数の符号

$f(a) \neq 0$ のとき、 $x = a$ の十分近くでは、 $f(x)$ の符号はつねに $f(a)$ の符号と一致する。

Case 1. $f(a) > 0$ のとき

連続性より $\delta > 0$ で

$$|x - a| < \delta \text{ のときつねに } |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

となるものがある。よって $|x - a| < \delta$ のとき

$$-\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \frac{f(a)}{2}$$

$$0 < \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$$

となるので、 $x = a$ の十分近くではつねに $f(x) > 0$ である。

Case 2. $f(a) < 0$ のとき

連続性より $\delta > 0$ で

$$|x - a| < \delta \text{ のときつねに } |f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2}$$

となるものがある。よって $|x - a| < \delta$ のとき

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < -\frac{f(a)}{2}$$

$$\frac{3f(a)}{2} < f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0$$

となるので, $x = a$ の十分近くではつねに $f(x) < 0$ である。■

定理 (中間値の定理)

関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続とし, $f(a) \neq f(b)$ とする。このとき, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 k に対して, $f(c) = k$ ($a < c < b$) となる c が存在する。

$F(x) = f(x) - k$ とおく。必要なら $-F(x)$ を考えて, $F(a) < 0, F(b) > 0$ と仮定してよい。 $F(x)$ も $a \leq x \leq b$ で連続である。

$A = \{x \mid F(x) > 0, a \leq x \leq b\}$ とおく。

A は, 下に有界で, 空ではないので下限 $c = \inf A$ ($a \leq c \leq b$) が存在する。

以下, $F(c) = 0$ となることを示す。そのために, $F(c) \neq 0$ と仮定して矛盾を導く。

Case 1. $F(c) > 0$ のとき

もし, $a = c$ なら Case 1 の仮定から $F(a) = F(c) > 0$ となるが, これは $F(a) < 0$ に反して矛盾。よって $a \neq c$ である。よって $a < c$ である。

Case 1 の仮定から $F(c) > 0$ であるから $x = c$ の十分近くではつねに $F(x) > 0$ である。よって十分小さな $h > 0$ をとると, $F(c-h) > 0$ ($a \leq c-h \leq b$) となる。そうすると $c-h \in A$ となるが, これは c が A の下界であることに反している。

Case 2. $F(c) < 0$ のとき

もし, $b = c$ なら Case 2 の仮定から $F(b) = F(c) < 0$ となるが, これは $F(b) > 0$ に反して矛盾。よって $b \neq c$ である。よって $c < b$ である。

Case 2 の仮定から $F(c) < 0$ であるから十分小さな $h > 0$ をとるとき $c \leq x < c+h$ ($\leq b$) かつ $F(x) < 0$ となる。一方, c は A の最大下界であるから $c+h$ はもはや A の下界ではない。よって $x_1 < c+h$ となる x_1 で $x_1 \in A$ となるものがあり, 従って $F(x_1) > 0$ である。ここで c は A の下界であるから $x_1 \in A$ より $c \leq x_1$ である。よって $c \leq x_1 < c+h$ で $F(x_1) > 0$ となる。しかし, これは $c \leq x < c+h$ かつ $F(x) < 0$ となることに反する。

以上より $F(c) = 0$ である。そうすると $F(a) \neq 0, F(b) \neq 0$ より $a < c < b$ も分かる。■