

Cauchy の平均値の定理

(Cauchy の平均値の定理)

$f(x), g(x)$ は $a < x < b$ で微分可能で, $a \leq x \leq b$ で連続であるとする。 $g(a) \neq g(b)$ で, $a < x < b$ において $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時には 0 にならないとする。このとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < b)$$

となる c が存在する。

$F(x) = \{g(b) - g(a)\}\{f(x) - f(a)\} - \{f(b) - f(a)\}\{g(x) - g(a)\}$ とおく。

$F(x)$ は $a < x < b$ で微分可能で, $a \leq x \leq b$ で連続である。

また,

$$F(a) = \{g(b) - g(a)\}\{f(a) - f(a)\} - \{f(b) - f(a)\}\{g(a) - g(a)\} = 0$$

$$F(b) = \{g(b) - g(a)\}\{f(b) - f(a)\} - \{f(b) - f(a)\}\{g(b) - g(a)\} = 0$$

であるから $F(a) = F(b)$ となる。よって Rolle の定理から

$$F'(c) = 0 \cdots 1$$

となる $a < c < b$ が存在する。ここで

$$F'(x) = \{g(b) - g(a)\}f'(x) - \{f(b) - f(a)\}g'(x)$$

であるから 1 より

$$\{g(b) - g(a)\}f'(c) - \{f(b) - f(a)\}g'(c) = 0$$

$$\{f(b) - f(a)\}g'(c) = \{g(b) - g(a)\}f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = f'(c)$$

となる。ここで, もし $g'(c) = 0$ なら $f'(c) = 0$ ともなり, 仮定に反する。よって $g'(c) \neq 0$ であるから

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となり, 示された。■

[例] 上の定理を用いて

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{\sin x - x}$$

を求めよう。

$f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ とおくと

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - f(x)}{g(\sin x) - g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \quad \text{☞ } c_x \text{ は } x \text{ と } \sin x \text{ の間}$$

$$= \lim_{c_x \rightarrow 0} \frac{\cos c_x}{1} \quad \text{☞ } x \rightarrow 0 \text{ のとき } \sin x \rightarrow 0 \text{ であるから } c_x \rightarrow 0$$

$$= 1$$