

部分分数展開

$f(x), g(x)$ を実数係数多項式とするとき、 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ を計算するには $\frac{f(x)}{g(x)}$ を部分分数展開する必要がある。

$f(x)$ の次数 $\deg f(x)$ が $g(x)$ の次数 $\deg g(x)$ より大きいときは、 $f(x)$ を $g(x)$ で割って

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg g(x)$$

とし、この両辺を $g(x)$ で割ると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \quad \deg r(x) < \deg g(x)$$

となるから、最初から $\deg f(x) < \deg g(x)$ のときに部分分数展開することを考えればよい。まず、準備から始める。

1 Euclid の互除法と互いに素な多項式

定理 (互いに素な多項式)

$f(x), g(x)$ が互いに素な多項式のとき、 $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$ となる多項式 $a(x), b(x)$ が存在する。

Euclid の互除法を用いて、順を追って示そう。

(1) $f_1(x) = f_2(x)h_1(x) + f_3(x) \cdots$ ①, $f_2(x) = f_3(x)h_2(x) + f_4(x) \cdots$ ② のとき
 $a(x)f_1(x) + b(x)f_2(x) = f_4(x)$ となる $a(x), b(x)$ が存在する。

① $\times h_2(x)$ より

$$f_1(x)h_2(x) = f_2(x)h_1(x)h_2(x) + f_3(x)h_2(x)$$

ここで、② より

$$f_3(x)h_2(x) = f_2(x) - f_4(x) \text{ であるから,}$$

これを代入すると

$$f_1(x)h_2(x) = f_2(x)h_1(x)h_2(x) + f_2(x) - f_4(x)$$

$$\text{つまり, } \{-h_2(x)\} f_1(x) + \{h_1(x)h_2(x) + 1\} f_2(x) = f_4(x)$$

よって $a(x) = -h_2(x)$, $b(x) = h_1(x)h_2(x) + 1$ とすればよい。■

- (2) $f(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots$ ③, $a(x)g(x) + b(x)r(x) = s(x) \cdots$ ④ のとき
 $A(x)f(x) + B(x)g(x) = s(x)$ となる $A(x), B(x)$ が存在する。

③ $\times b(x)$ より

$b(x)f(x) = b(x)g(x)h(x) + b(x)r(x)$ である。ここで ④ より $b(x)r(x) = s(x) - a(x)g(x)$ である。よって

$b(x)f(x) = b(x)g(x)h(x) + s(x) - a(x)g(x)$ つまり $b(x)f(x) + \{a(x) - b(x)h(x)\}g(x) = s(x)$ となる。よって $A(x) = b(x), B(x) = a(x) - b(x)h(x)$ とすればよい。■

- (3) 互いに素な多項式 $f(x), g(x)$ に対して Euclid の互除法を n 回行なって

$$f(x) = g_n(x)h_n(x) + g_{n-1}(x) \quad \deg g_n(x) > \deg g_{n-1}(x)$$

$$g_n(x) = g_{n-1}(x)h_{n-1}(x) + g_{n-2}(x) \quad \deg g_{n-1}(x) > \deg g_{n-2}(x)$$

.....

$$g_3(x) = g_2(x)h_2(x) + g_1(x) \quad \deg g_2(x) > \deg g_1(x)$$

$$g_2(x) = g_1(x)h_1(x) + d \quad d \text{ は } 0 \text{ でない定数}$$

とする。但し, $g(x) = g_n(x)$ とおく。

まず,

$$g_3(x) = g_2(x)h_2(x) + g_1(x) \quad \text{と} \quad g_2(x) = g_1(x)h_1(x) + d$$

に対して (1) の操作を行なうと, $c_3(x)g_3(x) + d_2(x)g_2(x) = d$ となる。 $c_3(x), d_2(x)$ が存在する。両辺を d で割ると, $a_3(x)g_3(x) + b_2(x)g_2(x) = 1$ となる。次に

$$a_3(x)g_3(x) + b_2(x)g_2(x) = 1 \quad \text{と} \quad g_4(x) = g_3(x)h_3(x) + g_2(x)$$

に対して (2) の操作をすると, $a_4(x)g_4(x) + b_3(x)g_3(x) = 1$ となる $a_4(x), b_3(x)$ が存在する。次に

$$a_4(x)g_4(x) + b_3(x)g_3(x) = 1 \quad \text{と} \quad g_5(x) = g_4(x)h_4(x) + g_3(x)$$

に対して (2) の操作をすると, $a_5(x)g_5(x) + b_4(x)g_4(x) = 1$ となる $a_5(x), b_4(x)$ が存在する。以下, この操作を繰り返すと

$$a_{n+1}(x)f(x) + b_n(x)g_n(x) = 1$$

となる $a_{n+1}(x), b_n(x)$ が存在する。

以上より, $f(x), g(x)$ が互いに素のとき, $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$ となる多項式 $a(x), b(x)$ が存在する。■

2 部分分数展開

$P(x)$, $Q(x)$ を互いに素な多項式とすると、上に見たように $a(x)P(x) + b(x)Q(x) = 1$ となる多項式 $a(x)$, $b(x)$ が存在する。この両辺に $f(x)$ を掛けると

$f(x)a(x)P(x) + f(x)b(x)Q(x) = f(x)$ となる。そこで両辺を $P(x)Q(x)$ で割ると

$$\frac{f(x)}{P(x)Q(x)} = \frac{f(x)a(x)}{Q(x)} + \frac{b(x)f(x)}{P(x)}$$

となる。従って $\frac{f(x)}{g(x)}$ において分母を、どの2つも

互いに素であるような多項式の積 $P_1(x)P_2(x)\cdots P_n(x)$ に分解しておけば

$$\frac{f(x)}{P_1(x)P_2(x)\cdots P_n(x)} = \frac{h_1(x)}{P_1(x)} + \frac{h_2(x)}{P_2(x)} + \cdots + \frac{h_n(x)}{P_n(x)}$$

の形にできる。ここで $P_j(x)$ は (1次式)^k または (既約な2次式)^k の形である。

各 $\frac{h_j(x)}{P_j(x)}$ において、必要なら割算を実行して商を出し、(分子の次数) < (分母の次数) とすることができる。

$\frac{h(x)}{(x-a)^k}$ において (分子の次数) < (分母の次数) とする。

$h(x)$ を $x-a$ で割って商と余りを求め、 $h(x) = (x-a)q_1(x) + r_1$ とすると、

$$\frac{h(x)}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)q_1(x) + r_1}{(x-a)^k} = \frac{q_1(x)}{(x-a)^{k-1}} + \frac{r_1}{(x-a)^k}$$

となる。次に $\frac{q_1(x)}{(x-a)^{k-1}}$ に対して同じ操作をし、これを繰り返すと

$$\frac{h(x)}{(x-a)^k} = \frac{r_k}{x-a} + \frac{r_{k-1}}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{r_1}{(x-a)^k}$$

の形に表せることが分かる^{注1}。

一方、 $x^2 + bx + c$ を既約な2次式とし、 $\frac{h(x)}{(x^2 + bx + c)^k}$ において

(分子の次数) < (分母の次数) とする。 $h(x)$ を $x^2 + bx + c$ で割って商と余りを求め、 $h(x) = (x^2 + bx + c)q_1(x) + r_1x + s_1$ とすると、

$$\frac{h(x)}{(x^2 + bx + c)^k} = \frac{(x^2 + bx + c)q_1(x) + r_1x + s_1}{(x^2 + bx + c)^k} = \frac{q_1(x)}{(x^2 + bx + c)^{k-1}} + \frac{r_1x + s_1}{(x^2 + bx + c)^k}$$

となる。次に $\frac{q_1(x)}{(x^2 + bx + c)^{k-1}}$ に対して同じ操作をし、これを繰り返すと

$$\frac{h(x)}{(x^2 + bx + c)^k} = \frac{r_kx + s_k}{x^2 + bx + c} + \frac{r_{k-1}x + s_{k-1}}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{r_1x + s_1}{(x^2 + bx + c)^k}$$

の形に表せることが分かる。

以上より、次が分かった。

^{注1} 1回操作する毎に $q_j(x)$ の次数は1ずつ下がる。そして、 $k-1$ 回までのうちに、定数となる。

$h(x)$ が定数なら $r_k = \cdots = r_2 = 0$ である。

$h(x)$ が1次なら $r_k = \cdots = r_3 = 0$ である。

(部分分数展開)

$$g(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_m)^{k_m} (x^2 + c_1x + d_1)^{\ell_1} \cdots (x^2 + c_nx + d_n)^{\ell_n}$$

を互いに素な多項式への因数分解とする。deg $f(x) < \text{deg } g(x)$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A_{11}}{x - a_1} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \cdots \\ &\cdots + \frac{A_{m1}}{x - a_m} + \frac{A_{m2}}{(x - a_m)^2} + \cdots + \frac{A_{mk_m}}{(x - a_m)^{k_m}} \\ &+ \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2 + c_1x + d_1} + \frac{C_{12}x + D_{12}}{(x^2 + c_1x + d_1)^2} + \cdots + \frac{C_{1\ell_1}x + D_{1\ell_1}}{(x^2 + c_1x + d_1)^{\ell_1}} + \cdots \\ &\cdots + \frac{C_{n1}x + D_{n1}}{x^2 + c_nx + d_n} + \frac{C_{n2}x + D_{n2}}{(x^2 + c_nx + d_n)^2} + \cdots + \frac{C_{n\ell_n}x + D_{n\ell_n}}{(x^2 + c_nx + d_n)^{\ell_n}} \end{aligned}$$

の形に部分分数展開できる。但し、 $x^2 + c_jx + d_j$ は既約な2次式とする。

【注】 $f(x)$ を実数係数多項式とする。 $f(x)$ を実数係数の範囲で完全に因数分解すると(1次式) k 、(既約な2次式) $^\ell$ の積になることは次のようにして分かる。

実数係数の n 次方程式は複素共役もまた解であることに注意して、 $f(x)$ を複素数の範囲で因数分解して考えると

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - p_1) \cdots (x - p_m)(x - \alpha_1)(x - \overline{\alpha_1}) \cdots (x - \alpha_n)(x - \overline{\alpha_n}) \\ &= a(x - p_1) \cdots (x - p_m) \{x^2 - (\alpha_1 + \overline{\alpha_1})x + \alpha_1 \overline{\alpha_1}\} \cdots \{x^2 - (\alpha_n + \overline{\alpha_n})x + \alpha_n \overline{\alpha_n}\} \end{aligned}$$

ここで、 a, p_1, \dots, p_m は実数、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は虚数とする。

$x^2 - (\alpha_k + \overline{\alpha_k})x + \alpha_k \overline{\alpha_k}$ は実数係数であるから、これが既約な2次式である。

従って、同じものをまとめると、 $f(x)$ は(1次式) k 、(既約な2次式) $^\ell$ の積になる。