

微分可能性と導関数の連続性について

微分可能性について次が成り立つ。

(定理)

$f(x)$ はいたるところ連続で, $x \neq a$ のとき微分可能とする。

$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f'(x)$ が存在するとき

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f'(x) \iff f(x) \text{ は } x = a \text{ で微分可能である}$$

(\implies) $x > a$ とする。 $f(t)$ は, $a < t < x$ において微分可能で, $a \leq t \leq x$ で連続であるから, 平均値の定理より

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \cdots 1$$

となる $a < c_x < x$ が存在する。 $x \rightarrow a+0$ のとき $c_x \rightarrow a$ である。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a+0} f'(c_x) \quad \text{☞ 1 より} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) \quad \text{☞ } \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) \text{ が存在する} \end{aligned}$$

同様にして $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-0} f'(x)$ である。よって

$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ と $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在して, 一致するので $x = a$ で $f(x)$ は微分可能である。

(\impliedby) $x > a$ とする。 $f(t)$ は, $a < t < x$ において微分可能で, $a \leq t \leq x$ で連続であるから, 平均値の定理より

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \cdots 2$$

となる $a < c_x < x$ が存在する。 $x \rightarrow a+0$ のとき $c_x \rightarrow a$ である。

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{☞ } x = a \text{ で微分可能} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+0} f'(c_x) \quad \text{☞ 2 より} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) \quad \text{☞ } \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) \text{ が存在する} \end{aligned}$$

である。同様に考えると $\lim_{x \rightarrow a-0} f'(x) = f'(a)$ でもある。よって $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f'(x)$ となる。■

上の (\Leftarrow) の証明から、次が分かる。

(系)

$f(x)$ は、 $x = a$ の近くで微分可能とする。

$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f'(x)$ が存在するとき、 $f'(x)$ は $x = a$ で連続である。

この系によれば $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ は存在するが $f'(a)$ とは一致しないと言うようなことはない。
 $f'(x)$ が不連続となるのは $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ が存在しないときだけである。

$$[\text{例}] f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \text{ とおく。}$$

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

であるから $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ となる。従って $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$ となる。

(2) $f'(x)$ は $x = 0$ で不連続である。

$x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

である。従って

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

となるがこの極限は存在しない。従って $f'(x)$ は $x = 0$ で不連続である。

[例] $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 1) \\ ax + b \sin \pi x & (x < 1) \end{cases}$ とする。 $f(x)$ がすべての実数 x に対し微分可能で

あるときに a, b の値を求める。

微分可能ならば連続であるから $f(x)$ は $x = 1$ で連続である。今, $f(1) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} 1 = f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (ax + b \sin \pi x) \\ &= a \end{aligned}$$

となる。従って $x < 1$ のとき $f(x) = x + b \sin \pi x$ である。よって $x < 1$ のとき

$$f'(x) = 1 + \pi b \cos \pi x$$

となる。そうすると

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1 + \pi b \cos \pi x) = 1 - \pi b$$

である。また $x > 1$ のとき $f'(x) = 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) = 0$$

となる。従って $\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x), \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x)$ がともに存在するので $f'(x)$ は $x = 1$ で連続である。

よって

$$\begin{aligned} 1 - \pi b &= \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり $b = \frac{1}{\pi}$ である。