

パラメータを含む積分

パラメータを含む関数について，有限区間での積分記号下での微分に関して考える。
まず，準備から始める。

(命題)

$f(x, y)$ が $K = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ 上で 2 変数関数として連続とする。

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

とおくと， $g(y)$ は y に関して連続である。

$f(x, y)$ は有界閉領域 K で連続であるから一様連続である。よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある δ で

$$|x_1 - x_2| < \delta, \quad |y_1 - y_2| < \delta$$

であれば，つねに

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

となるものがある。特に $x = x_1 = x_2$ とすると $0 = |x_1 - x_2| < \delta$ であるから， $|y_1 - y_2| < \delta$ のときつねに

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

となる。よって $\sup_{x \in [a, b]} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ である。そうすると

$$\begin{aligned} & |g(y_1) - g(y_2)| \\ &= \left| \int_a^b f(x, y_1) dx - \int_a^b f(x, y_2) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \{f(x, y_1) - f(x, y_2)\} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, y_1) - f(x, y_2)| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

従って、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して

$$|y_1 - y_2| < \delta \text{ ならば } |g(y_1) - g(y_2)| < \varepsilon$$

となるので、 $g(y)$ は $[\alpha, \beta]$ で一様連続である。■

(累次積分の順序交換)

$f(x, y)$ が $K = \{ (x, y) \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), a \leq x \leq b \}$ で連続とし

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

とおく。このとき、 x と y を取りかえて

$$h(x) = \int_\alpha^\beta f(x, y) dy$$

とすると、命題より $h(x)$ は x の関数として連続であるから積分可能であって

$$\int_\alpha^\beta g(y) dy = \int_a^b h(x) dx$$

区間 $[a, b]$ を m 等分して分割 $\Delta_m : a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$ をとる。 $m \rightarrow \infty$ のとき、分割の幅は $a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{m} \rightarrow 0$ である。

$$F_m(y) = \sum_{i=1}^m f(a_i, y)(a_i - a_{i-1})$$

とおく。 y を固定して $m \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(y) = \int_a^b f(x, y) dx = g(y)$$

であるが、これが一様収束であることを示せば、項別積分ができる。

任意の $\varepsilon > 0$ をとる。 $f(x, y)$ は x の関数として $[a, b]$ 上で連続であるから一様連続である。 $a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{m}$ であるから, m を大きくとれば $a_i - a_{i-1}$ は i によらずいくらでも 0 に近くできる。 よって m_0 を十分大きくとれば $m \geq m_0$ のときつねに

$$a_{i-1} \leq x \leq a_i \quad \text{ならば} \quad |f(x, y) - f(a_i, y)| < \varepsilon$$

とできる。 そうすると

$$\left| \int_{a_{i-1}}^{a_i} \{f(x, y) - f(a_i, y)\} dx \right| \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(x, y) - f(a_i, y)| dx < \int_{a_{i-1}}^{a_i} \varepsilon dx = \varepsilon(a_i - a_{i-1})$$

となり $\left| \int_{a_{i-1}}^{a_i} \{f(x, y) - f(a_i, y)\} dx \right| < \varepsilon(a_i - a_{i-1})$ である。 よって, $i = 1$ から $i = m$ まで和をとると

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^m \int_{a_{i-1}}^{a_i} \{f(x, y) - f(a_i, y)\} dx \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^m \left| \int_{a_{i-1}}^{a_i} \{f(x, y) - f(a_i, y)\} dx \right| \\ & < \varepsilon \sum_{i=1}^m (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

であるから $\left| \sum_{i=1}^m \int_{a_{i-1}}^{a_i} \{f(x, y) - f(a_i, y)\} dx \right| < \varepsilon(b - a)$ となる。 ここで

$$\sum_{i=1}^m \int_{a_{i-1}}^{a_i} \{f(x, y) - f(a_i, y)\} dx = \int_a^b f(x, y) dx - \sum_{i=1}^m f(a_i, y)(a_i - a_{i-1}) = g(y) - F_m(y)$$

であるから, $m \geq m_0$ のとき, y によらずつねに

$$|g(y) - F_m(y)| < \varepsilon(b - a)$$

となる。 従って $F_m(y) \Rightarrow g(y)$ (一様収束) によって, 項別積分の定理より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^\beta F_m(y) dy = \int_a^\beta g(y) dy$$

一方,

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} F_m(y) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=1}^m f(a_i, y)(a_i - a_{i-1}) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (a_i - a_{i-1}) \int_{\alpha}^{\beta} f(a_i, y) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (a_i - a_{i-1}) h(a_i) \\ &= \int_a^b h(x) dx \end{aligned}$$

以上で, $\int_{\alpha}^{\beta} g(y) dy = \int_a^b h(x) dx$ ■

(積分記号下での微分)

$f(x, y)$ は $K = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ で連続, y で偏微分可能で, $f_y(x, y)$ も K で連続ならば

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

とおくとき, $g(y)$ は微分可能であって

$$g'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx$$

となる。更に $g'(y)$ は連続である。

$\varphi(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx$ とおく。 $f_y(x, y)$ は K 上で連続であるから, 命題より $\varphi(y)$ は $\alpha \leq y \leq \beta$ で連続である。

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^y \varphi(t) dt &= \int_{\alpha}^y \left[\int_a^b f_t(x, t) dx \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\int_{\alpha}^y f_t(x, t) dt \right] dx \end{aligned} \quad \text{👉 積分の順序交換}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \{f(x, y) - f(x, \alpha)\} dx \\
 &= \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, \alpha) dx \\
 &= g(y) - g(\alpha)
 \end{aligned}$$

よって $\int_a^y \varphi(t) dt = g(y) - g(\alpha)$ であるから、微積分学の基本定理より、この両辺は y に関して微分可能で

$$\varphi(y) = g'(y) \quad \text{つまり} \quad \int_a^b f_y(x, y) dx = g'(y)$$

となる。■

(パラメータを含む定積分と微分)

$K = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ とする。

$a(y), b(y)$ は $\alpha \leq y \leq \beta$ で微分可能で $a \leq a(y) < b(y) \leq b$ とする。 $f(x, y)$ は K で連続, y に関して偏微分可能で, $f_y(x, y)$ も K で連続とする。

$$g(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$$

とおくと, $g(y)$ は微分可能で

$$g'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y)$$

となる。

u, v は, $a \leq u < v \leq b$ なる変数とし

$$\varphi(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) dx$$

とおく。(積分記号下での微分)より, $\varphi(y, u, v)$ は y に関して偏微分可能で,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, u, v) = \int_u^v f_y(x, y) dx$$

である。更に $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, u, v)$ は連続である。また、微積分学の基本定理より

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(y, u, v) = -f(u, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(y, u, v) = f(v, y)$$

であるから、 $\varphi(y, u, v)$ は u, v に関して偏微分可能で、偏導関数は連続である。よって、 $\varphi(y, u, v)$ は全微分可能である。 $g(y) = \varphi(y, a(y), b(y))$ であるから、合成微分の公式より

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, a(y), b(y)) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dy}(y, a(y), b(y)) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{dy}(y, a(y), b(y)) \\ &= \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

[例] $0 \leq x \leq a$ において $f(x)$ は連続とし、自然数 n に対して

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt$$

とおく。また $n=0$ のときには

$$F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$$

とする。そうすると、上の定理によって

$$F_n'(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) \right\} dt + \frac{(x-x)^n}{n!} f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt = F_{n-1}(x)$$

である。また、 $F_0'(x) = f(x)$ である。よって

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} F_n(x) = f(x), \quad F_0(0) = F_1'(0) = \cdots = F_n^{(n)}(0) = 0$$

従って、微分方程式 $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ の一般解は

$$y = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$$

となる。